平成 26 年度前期選抜学力検査　詳解

1

(1)

$$
\begin{aligned}
-8-2\times\left(-3^2\right) &= -8-2\times(-9)\\
&= -8+18\\
&= 10
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{x-3y}{3}-\frac{2x-y}{4} &= \frac{4(x-3y)}{12}-\frac{3(2x-y)}{12}\\
&= \frac{4(x-3y)-3(2x-y)}{12}\\
&= \frac{4x-12y-6x+3y}{12}\\
&= \frac{4x+6x-12y+3y}{12}\\
&= \frac{-2x-9y}{12}\\
&\left(= -\frac{1}{6}x-\frac{3}{4}y\right)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{cases}
5x+2y=9 & \cdots\cdots ①\\
4x-3y=21 & \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

①×3＋②×2 より

$$
\begin{array}{rrcr}
 & 15x+6y & = & 27\\
+) & 8x-6y & = & 42\\
\hline
 & 23x & = & 69\\
 & x & = & 3
\end{array}
$$

①より

$$
\begin{aligned}
5\times3+2y &= 9\\
15+2y &= 9\\
2y &= 9-15\\
2y &= -6\\
y &= -3
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{cases}
x=3\\
y=-3
\end{cases}
$$

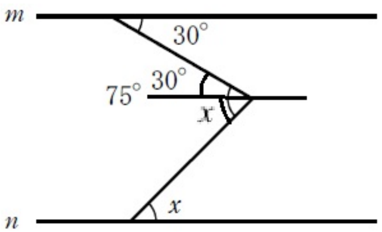
(4)

$$
\begin{aligned}
2\sqrt{5}+\frac{7}{\sqrt{5}}-\sqrt{125} &= 2\sqrt{5}+\frac{7\sqrt{5}}{5}-5\sqrt{5}\\
&= \left(2+\frac{7}{5}-5\right)\sqrt{5}\\
&= \left(-3+\frac{7}{5}\right)\sqrt{5}\\
&= \left(-\frac{15}{5}+\frac{7}{5}\right)\sqrt{5}\\
&= -\frac{8\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

(5)

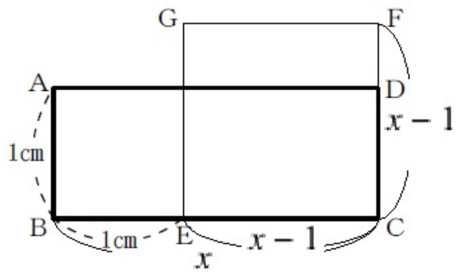
$$\begin{aligned}(x+5)^2+3(x+5)-4 &= \{(x+5)+4\}\{(x+5)-1\}\\ &= (x+5+4)(x+5-1)\\ &= (x+9)(x+4)\end{aligned}$$

(6)



$$\begin{aligned}30^\circ + x &= 75^\circ\\ x &= 75^\circ - 30^\circ\\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

(7)



BC $= x$ とすると

EC $= x-1$

また，面積について

四角形 ABCD $= 1 \times x$

$= x$,

正方形 ECFG $= \mathrm{EC}^2$

$= (x-1)^2$

よって

$$\begin{aligned}x &= (x-1)^2\\ x &= x^2-2x+1\\ x^2-3x+1 &= 0\\ x &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2}\\ &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$x = \mathrm{BC} > 1$，$\sqrt{5} > 2$ より $x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ は $x < 1$ で不適．よって

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Ans. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(8)

カードの並べ方は

$${}_4\mathrm{P}_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$= 24$ 通り

A が左端，B が右端のとき，場合の数は間の 2 枚が

$\boxed{\mathrm{C}}\boxed{\mathrm{D}}$ と $\boxed{\mathrm{D}}\boxed{\mathrm{C}}$

の 2 通り．

同様に，B が左端，A が右端のときも 2 通り．

よって求める場合の数は

$2+2=4$ 通り

以上より求める確率は

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$$

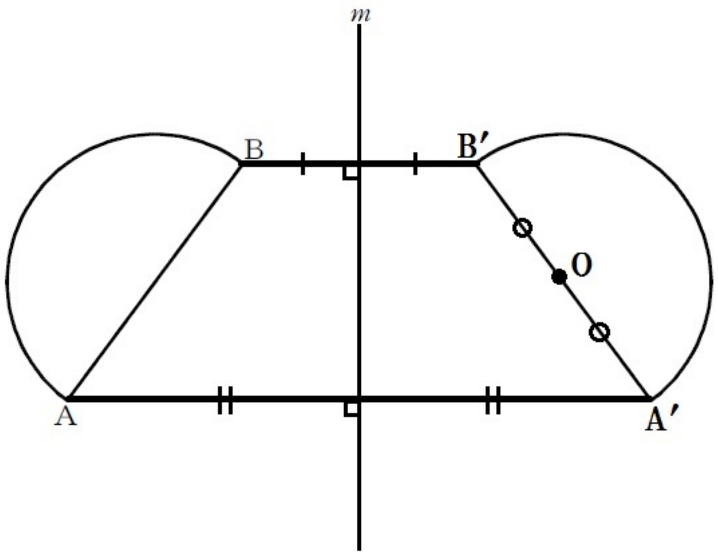
補足

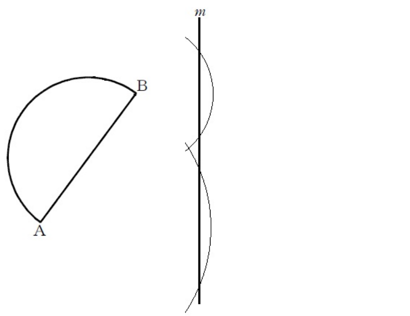
${}_n\mathrm{P}_r$ ： 異なる n 個のものから r 個取り出して 1 列に並べる順列 (並べ方)

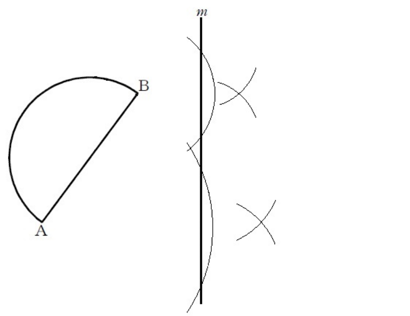
$${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}_{r\text{ 個}}$$

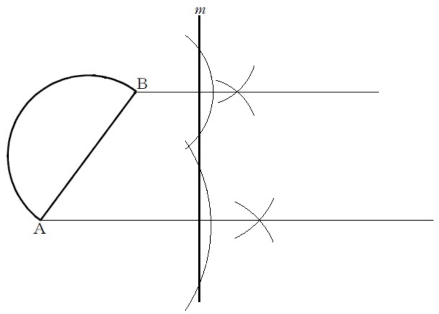
(9)

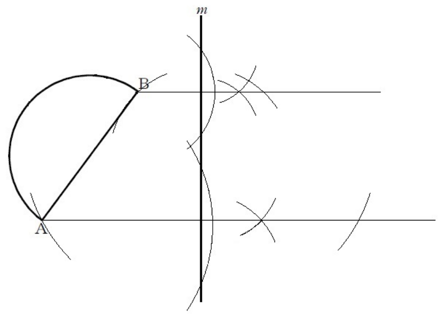
直線 m を垂直二等分線とする線分 AA′，BB′ を作図し，線分 A′B′ の中点を中心 O として半円を作図すればよい．

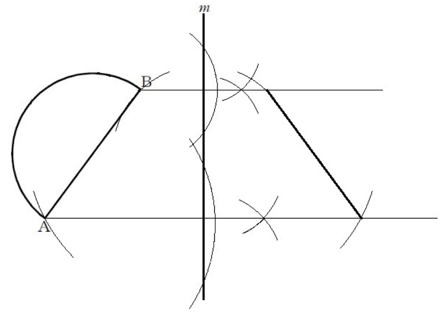


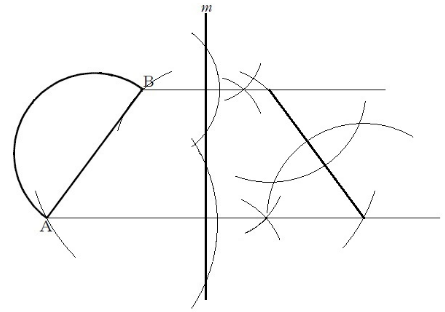


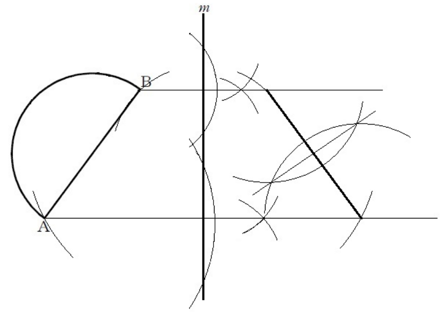


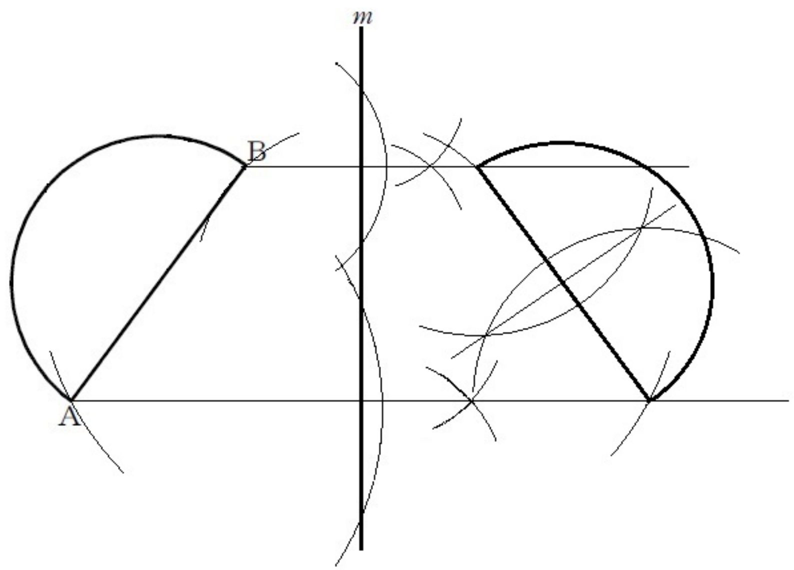










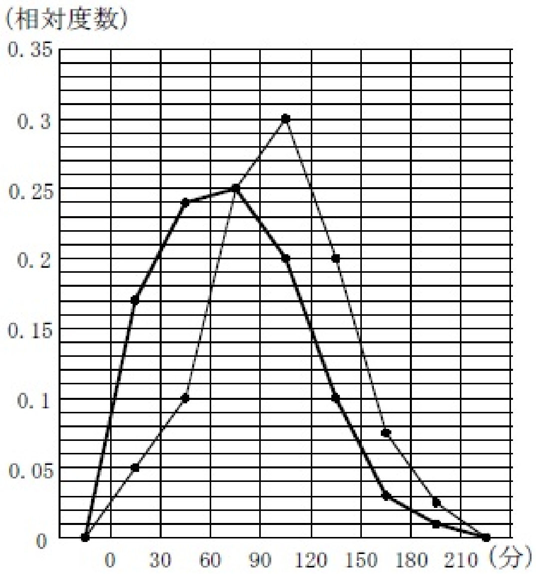


$\boxed{2}$

(1)

階級の幅は 30 分.

(2)



(3)

ア：表 1 から読み取ることができる.

イ：表 2 より 60 分未満の相対度数は

$$0.17+0.24=0.41<0.5$$

で誤り.

ウ：1 年生は 80 人なので 60 分以上 90 分未満の生徒は

$$80\times 0.3=24 \text{ 人}$$

3 年生は 100 人なので 60 分以上 90 分未満の生徒は

$$100\times 0.25=25 \text{ 人}$$

よって誤り.

エ：(2)のグラフより全体の傾向としていうことができる.

以上より**ア**と**エ**.

$\boxed{3}$

$$y=x^2 \quad \cdots\cdots ㋐$$

$$\mathrm{A}(1,1)$$

$$\mathrm{B}(2,4)$$

(1)

x の変域が原点をまたいでいて関数㋐の x^2 の係数が正なので，最小値は 0.

最大値は $x=-2$ のとき

$$y=(-2)^2 \\ =4$$

よって $0\leqq y\leqq 4$.

(2)

C の座標を $\mathrm{C}(c,d)$ とすると，対角線 OB，AC の中点が一致することから

$$\begin{cases}\dfrac{0+2}{2}=\dfrac{1+c}{2}\\[2mm] \dfrac{0+4}{2}=\dfrac{1+d}{2}\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}2=1+c\\ 4=1+d\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}c=1\\ d=3\end{cases}$$

よって $\mathrm{C}(1,3)$.

(3)

求める直線の式を $y=ax+b$ とおくと，A を通ることより

$$1=a+b \quad \cdots\cdots①$$

B を通ることより

$$4=2a+b \quad \cdots\cdots②$$

② − ① より

$$\begin{array}{rccc} & 4 & = & 2a+b \\ -) & 1 & = & a+b \\ \hline & 3 & = & a \end{array}$$

よって $a=3$．①より

$$1=3+b$$

$$\therefore b=-2$$

ゆえに求める直線の式は

$$y=3x-2$$

(4)

$\triangle\mathrm{OAC}=\triangle\mathrm{BAC}$ より 平行四辺形 $\mathrm{OABC}=2\triangle\mathrm{OAC}=2\triangle\mathrm{BAC}$.

AC が y 軸に平行なので $\triangle$OAC の底辺を AC と見ると高さは y 軸と AC との距離で 1.

$\triangle$PAC が平行四辺形 OABC の 2 倍になるとき，$\triangle$OAC の 4 倍になる．よって AC を底辺と見たときの $\triangle$PAC の高さは 4.

点 P の x 座標は点 A の x 座標 $(=1)$ より小さいので，P の x 座標を p とすると

$$1-p=4$$

$$\therefore p=-3$$

このとき㋐の式より

$$y=(-3)^2$$

$$=9$$

よって $\mathrm{P}(-3,9)$.

(5)

B を通る傾き −2 の直線の式を

$$y=-2x+e$$

とおくと，$\mathrm{B}(2,4)$ を通ることから

$$4=-4+e$$

$$\therefore e=8$$

$$\therefore y=-2x+8 \quad \cdots\cdots③$$

直線 CB の傾きは 1 なので，直線 CB の式を

$$y=x+f$$

とおくと，B を通ることから

$$4=2+f$$

$$\therefore f=2$$

$$\therefore y=x+2$$

③の式に $y=0$ を代入すると

$$0=-2x+8$$

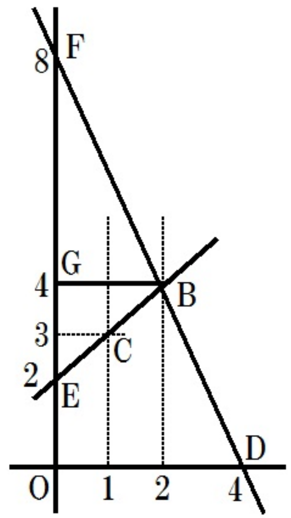
$$\therefore x=4$$

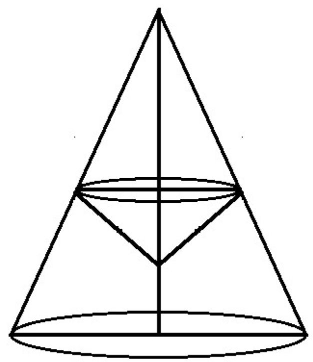
ゆえに

$\mathrm{D}(4,0)$

$\mathrm{E}(0,2)$

求める体積は





$$\underbrace{\frac{1}{3}\times 4^2\pi\times 8}_{\triangle\text{ODF の回転}}-\underbrace{\frac{1}{3}\times 2^2\pi\times(8-4)}_{\triangle\text{GBF の回転}}-\underbrace{\frac{1}{3}\times 2^2\pi\times(4-2)}_{\triangle\text{GBE の回転}}$$

$$=\frac{1}{3}(16\times 8-4\times 4-4\times 2)\pi$$

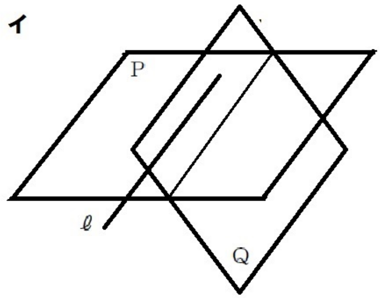
$$=\frac{1}{3}(128-16-8)\pi$$

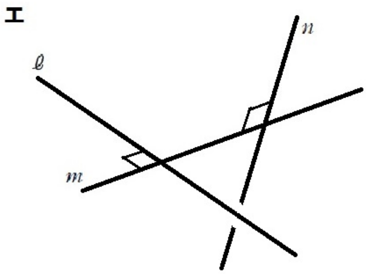
$$=\frac{104}{3}\pi\ \text{cm}^3$$

$\boxed{4}$

(1)

ア ： 正しい
イ ： 誤り
ウ ： 正しい
エ ： 誤り





(2)

$$\text{体積}=\frac{1}{3}\times\underbrace{8\times 8}_{\text{底面積}}\times\underbrace{3}_{\text{高さ}}$$

$$=64\ \text{cm}^3$$

$$\text{表面積}=\underbrace{8\times 8}_{\text{底面}}+\underbrace{4\times\left(\frac{1}{2}\times 8\times 5\right)}_{\text{側面}}$$

$$=64+80$$

$$=144\ \text{cm}^2$$

(3)

m が奇数のとき，m 行目 n 列目の数 $a_{\text{odd}(m,n)}$ は

$$a_{\text{odd}(m,n)}=7(m-1)+n \qquad (m-1)\text{ は偶数} \qquad (1\leqq n\leqq 7)$$

m が偶数のとき，m 行目 n 列目の数 $a_{\text{even}(m,n)}$ は

$$a_{\text{even}(m,n)}=7m-(n-1)$$

$$=7m-n+1 \qquad m\text{ は偶数} \qquad (1\leqq n\leqq 7)$$

①

7 行目 1 列目の数は

$$a_{\text{odd}(7,1)}=7(7-1)+1$$

$$=7\times 6+1$$

$$=43$$

②

i) m が奇数のとき

$$a=7(m-1)+n$$

求める数は

$$7\{(m-1)+2\}+n=7(m-1)+14+n$$

$$=7(m-1)+n+14$$

$$=a+14$$

ii) m が偶数のとき

$$a=7m-n+1$$

求める数は

$$7(m+2)-n+1=7m+14-n+1$$

$$=7m-n+1+14$$

$$=a+14$$

i), ii) より求める数は m の奇偶に関係なく $a+14$.

③

545 を $7\times(\text{偶数})+k\ \ (-6\leqq k\leqq 7)$ の形で表すと

$$\begin{aligned}545 &= 7\times 77+6\\ &= 7\times 78-1\end{aligned}$$

よって $m=78$ で

$$a_{\text{even}(78,n)} = 7\times 78-n+1$$
$$\therefore -n+1=-1$$
$$\therefore n=2$$

Ans. 78 行目 2 列目

解説

奇数の行の $a_{\text{odd}(m,n)}$ も偶数の行の $a_{\text{even}(m,n)}$ も

$$a=7\times(\text{偶数})+k$$

の形になる．これは 2 行で 1 つのサイクルになっているため, $7\times 2=14$ の倍数を基準として考えてく必要があることと関連している．n は $1\leqq n\leqq 7$ の値をとるので，k は $-6\leqq k\leqq 7$ の範囲になるように上式の (偶数) と k を調整してやれば，$-6\leqq k\leqq 0$ となれば偶数行で $m=(\text{偶数})$，$1\leqq k\leqq 7$ となれば奇数行で $m=(\text{偶数})+1$ となる．
詳解では数学的な導出をしたが，(3)②は単純に $a+14$ とわかるのでわざわざ場合分けをせずにそれを解答としてよい．また，③は 545 を 14 で割って余りを考えれば良い．

$\boxed{5}$

(1)

[証明]

$\triangle$BDE と $\triangle$CFD において，正三角形の内角より

$$\angle\text{EBD}=\angle\text{DCF}\ \ (=60^\circ)\quad\cdots\cdots①$$

また，折り返した図形より

$$\angle\text{EAF}=\angle\text{EDF}=60^\circ$$

$\angle\text{BDE}=a^\circ$ とすると，$\triangle$BDE において

$$\begin{aligned}\angle\text{BED} &= 180^\circ-(\angle\text{EBD}+a^\circ)\\ &= 180^\circ-(60^\circ+a^\circ)\\ &= 120^\circ-a^\circ\quad\cdots\cdots②\end{aligned}$$

また，BC について

$$\begin{aligned}\angle\text{CDF} &= 180^\circ-(\angle\text{EDF}+a^\circ)\\ &= 180^\circ-(60^\circ+a^\circ)\\ &= 120^\circ-a^\circ\quad\cdots\cdots③\end{aligned}$$

②，③より

$$\angle\text{BED}=\angle\text{CDF}\quad\cdots\cdots④$$

①，④より，2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle\text{BDE}\backsim\triangle\text{CFD}$$

Q.E.D.

(2)

①

折り返した図形より $\triangle AEF \equiv \triangle DEF$ で

$$AE = DE$$
$$AF = DF$$

よって $AE : AF = 2 : 3$ より

$$ED : DF = 2 : 3$$

ゆえに $\triangle BDE \backsim \triangle CFD$ で相似比が $2 : 3$ より求める面積比は

$$\begin{aligned}\triangle BDE : \triangle CFD &= 2^2 : 3^2 \\ &= 4 : 9\end{aligned}$$

②

$AE = 2a$ とすると $AF = 3a$.

$$\begin{aligned}BE &= AB - AE \\ &= 12 - 2a\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}CF &= AC - AF \\ &= 12 - 3a\end{aligned}$$

$BD : CF = 2 : 3$ より

$$3BD = 2CF$$
$$\begin{aligned}\therefore BD &= \frac{2}{3}CF \\ &= \frac{2}{3}(12 - 3a) \\ &= 8 - 2a\end{aligned}$$

$BE : CD = 2 : 3$ より

$$2CD = 3BE$$
$$\begin{aligned}\therefore CD &= \frac{3}{2}BE \\ &= \frac{3}{2}(12 - 2a) \\ &= 18 - 3a\end{aligned}$$

$BD + CD = 12$ より

$$\begin{aligned}(8 - 2a) + (18 - 3a) &= 12 \\ 26 - 5a &= 12 \\ -5a &= -14 \\ a &= \frac{14}{5}\end{aligned}$$

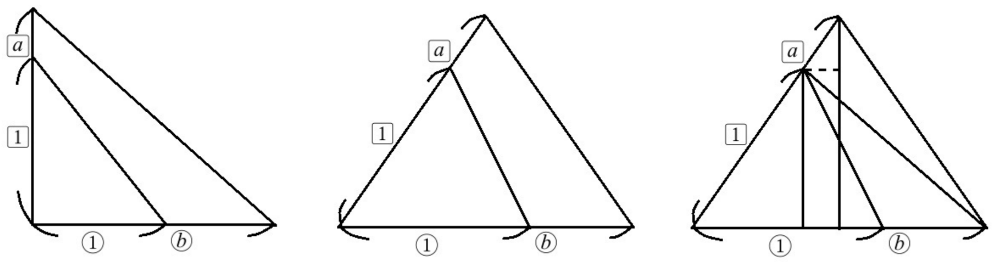
③

$$\begin{aligned}\triangle DEF = \triangle AEF &= \frac{2a}{12} \times \frac{3a}{12}\triangle ABC \\ &= \frac{a^2}{24}\triangle ABC \\ &= \frac{1}{24} \times \left(\frac{14}{5}\right)^2 \triangle ABC \\ &= \frac{1}{24} \times \frac{14 \times 14}{25}\triangle ABC \\ &= \frac{49}{150}\triangle ABC\end{aligned}$$

よって $\frac{49}{150}$ 倍.

解説

三角形の 2 辺が直交関係にあるとき，その 2 辺をそれぞれ a 倍，b 倍したとき，面積はもとの三角形の ab 倍になることは計算によって確かめることができるが，2 辺が直交関係にない場合でもこの関係は成立する．証明としては，b 倍する辺を底辺とすれば，まず底辺を b 倍することで面積は b 倍になり，次にもう一方の辺を a 倍する際は相似の関係を使えば高さが a 倍になるので面積が a 倍になり，結局面積は ab 倍になる．
この性質は高校数学で学習するベクトルや三角比による三角形の面積の公式から考えたほうが明瞭に解決すると言える．



面積から具体的に求めると，F から AE へ下ろした垂線の長さは $\mathrm{AE} = \dfrac{42}{5}$ より

$$\mathrm{AE} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{42}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{5}$$

よって

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{AEF} &= \frac{1}{2} \times \mathrm{AF} \times \frac{21\sqrt{3}}{5} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{28}{5} \times \frac{21\sqrt{3}}{5} \\ &= \frac{294\sqrt{3}}{5}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{1}{2} \times 12 \times \left(12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 36\sqrt{3}\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned}\frac{\triangle \mathrm{DEF}}{\triangle \mathrm{ABC}} &= \frac{\triangle \mathrm{AEF}}{\triangle \mathrm{ABC}} \\ &= \frac{\frac{294\sqrt{3}}{25}}{36\sqrt{3}} \\ &= \frac{294\sqrt{3}}{25 \times 36\sqrt{3}} \\ &= \frac{49}{150}\end{aligned}$$

注) 途中式中の記号 ∴ は「よって」の意味．また，最終的な答え以外では cm などの単位は省略した．

総評

全体として前期試験としては易しい内容であった．1は前期試験としては標準的な内容．(8)は並べ方の出題であったので書き出した場合は若干時間を要する．(9)の作図は内容は基本的だが作業が多い．詳解では 1 年生の図形の知識で作図できる方法を示した．2は統計に関する問題が初めて大問 1 つを占める形で出題された．内容は易しいと言えるが，(3)では傾向を漠然と読み取る内容も出題された．3は昨年も出題された 2 次関数と平行四辺形に関する問題で三重県の入試問題の伝統であるが，座標平面での平行四辺形の置かれ方が易しいので関数に関する部分は比較的易しい．(5)は新たに座標を求める必要があり，回転の元になる図形が示されていないのでしっかりとしたイメージが必要となり取り組みにくかったと思われる．4 (1)は 1 年生の内容で基本問題あるが，三重県の入試で出される内容としては珍しい．(2)は新課程からの出題．(3)は前期・後期を通して久々に出題された算数問題であった．5の図形総合問題は比較的易しかった．最後の問題は恒例の汚い数字の問題であるが，学校の教科書の内容より発展的知識を知っているか否かで解答時間に差が出る内容で (解説参照)，公立の問題というよりは私立の入試問題といった印象がある．

作成：松田 一真（K’s Massenburg Lab）
http://k-m-l.jp