平成 25 年度学力検査　数学　詳解

1

(1)

$$3 \times (-7) = -3 \times 7$$
$$= -21$$

(2)

$$-\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{10} + \frac{5}{10}$$
$$= \frac{-2+5}{10}$$
$$= \frac{3}{10}$$

(3)

$$8 - a^2 = 8 - (-2)^2$$
$$= 8 - (+4)$$
$$= 8 - 4$$
$$= 4$$

(4)

$$5(2a-3b) - 3(a-2b) = (10a - 15b) - (3a - 6b)$$
$$= 10a - 15b - 3a + 6b$$
$$= 10a - 3a - 15b - 6b$$
$$= 7a - 9b$$

(5)

$$\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 = 5 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{3} + 3$$
$$= 5 + 3 - 2\sqrt{15}$$
$$= 8 - 2\sqrt{15}$$

(6)

$$2x^2 - 2x - 9 = 2x + 7$$
$$2x^2 - 2x - 2x - 9 - 7 = 0$$
$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$
$$2\left(x^2 - 2x - 8\right) = 0$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$(x-4)(x+2) = 0$$
$$x = 4,\ -2$$

(7)

a の 35% が 49．よって

$$\frac{35}{100}a = 49$$
$$a = 49 \times \frac{100}{35}$$
$$= 140$$

2

(1)

50 円切手の枚数を x 枚，80 円切手の枚数を y 枚とすると，10 円切手の枚数は 6 枚なので，枚数の関係から

$$x+y+6=28 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

代金の関係から

$$50x+80y+60=1400 \qquad \cdots\cdots ㋑$$

㋐より

$$y=-x-6+28$$

$$\therefore y=-x+22 \qquad \cdots\cdots ㋒$$

㋑より

$$50x+80y=1400-60$$

$$50x+80y=1340 \qquad (\text{両辺}\div 10)$$

$$5x+8y=134 \qquad \cdots\cdots ㋓$$

㋓に㋒を代入して

$$5x+8(-x+22)=134$$

$$5x-8x+176=134$$

$$-3x=134-176$$

$$-3x=-42$$

$$\therefore x=14$$

㋒より

$$y=-14+22$$

$$=8$$

よって

$$\begin{cases} x=14 \\ y=8 \end{cases}$$

① : $x+y+6$

② : $50x+80y+60$

③ : 14

④ : 8

(2)

①

$$\text{平均値}=20+\frac{+6-2+9+0-4+3}{6}$$

$$=20+\frac{6+9+3-2-4}{6}$$

$$=20+\frac{6+12-6}{6}$$

$$=20+\frac{12}{6}$$

$$=20+2$$

$$=2\ \text{m}$$

②

6 人を距離の短い順に並べると，

生徒	E	B	D	F	A	C
記録 (m)	16	18	20	23	26	29

人数が 6 人で偶数なので，中央値は 3 番目の D と 4 番目の F の記録の平均.

$$\text{中央値} = \frac{20+23}{2} = \frac{43}{2} = 21.5 \text{ m}$$

(3)

①

玉の取り出し方は $_6\mathrm{C}_2$ 通り．白玉は 4 個あるので，2 個とも白玉になる取り出し方は $_4\mathrm{C}_2$ 通り．よって求める確率は

$$\frac{_4\mathrm{C}_2}{_6\mathrm{C}_2} = \frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{6\times5}{2\times1}} = \frac{4\times3}{6\times5} = \frac{2}{5}$$

②

6 以上になる組み合わせは

$(6,1)$，$(6,2)$，$(6,3)$，$(6,4)$，$(6,5)$

$(5,1)$，$(5,2)$，$(5,3)$，$(5,4)$

$(4,2)$，$(4,3)$

の 11 通り．よって求める確率は

$$\frac{11}{_6\mathrm{C}_2} = \frac{11}{\frac{6\times5}{2\times1}} = \frac{11}{15}$$

注) 6 未満になる組み合わせを考えて余事象から計算したほうが楽に求められる．

補足

$_n\mathrm{C}_r$ ： 異なる n 個のものから r 個取り出す組み合わせ

$$_n\mathrm{C}_r = \frac{\overbrace{n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{\underbrace{r\times(r-1)\times(r-2)\times\cdots\times2\times1}_{r\text{ 個}}}$$

$\boxed{3}$

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad \cdots\cdots ㋐$$

$\mathrm{A}(-2, 1)$

$\mathrm{B}(4, p)$

(1)

点 B は関数㋐のグラフ上の点なので，㋐の式に $x = 4$, $y = p$ を代入して

$$p = \frac{1}{4}\times4^2 = 4$$

⑵

x の変域が $-5 \leqq x \leqq 3$ で原点をまたいでいる．x^2 の係数が正なので y の最小値は 0．最大値は $x = -5$ のとき，㋐の式より

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4} \times (-5)^2 \\ &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

よって

$$0 \leqq y \leqq \frac{25}{4}$$

⑶

$$\mathrm{A}(-2, 1)$$
$$\mathrm{B}(4, 4)$$

求める直線の式を

$$y = ax + b$$

とすると，A を通ることより

$$1 = -2a + b \qquad \cdots\cdots ①$$

B を通ることより

$$4 = 4a + b \qquad \cdots\cdots ②$$

② − ① より

$$\begin{array}{rcc} & 4 & = & 4a + b \\ -) & 1 & = & -2a + b \\ \hline & 3 & = & 6a \\ & a & = & \dfrac{1}{2} \end{array}$$

$y = \dfrac{1}{2}x + b$ が B を通ることより

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{1}{2} \times 4 + b \\ 4 &= 2 + b \\ \therefore b &= 2 \end{aligned}$$

よって求める直線の式は

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

⑷

①

A，B を通る直線の y 切片は 2．線分 AB を底辺と見ると，AB に平行で C を通る直線上に頂点 C′ をとったとき等積変形により △ABC と △ABC′ の面積は等しくなる．よって C′ を y 軸上にとれば面積が求められる．

⑶より傾きが $\dfrac{1}{2}$ で点 $\mathrm{C}(-6, 9)$ を通る直線の式は

$$y = \frac{1}{2}x + c$$

に $x = -6$, $y = 9$ を代入して

$$\begin{aligned} 9 &= \frac{1}{2} \times (-6) + c \\ 9 &= -3 + c \\ \therefore c &= 12 \\ \therefore y &= \frac{1}{2}x + 12 \end{aligned}$$

よって $\mathrm{C}'(0, 12)$ とすると，図より △ABC′ の面積は

$$\frac{1}{2}\times(12-2)\times4+\frac{1}{2}(12-2)\times2=20+10$$
$$=30$$

すなわち $\triangle$ABC の面積は 30 cm^2.

②

①で求めた直線と x 軸との交点は $x<0$ の領域にある．AB を底辺としたときに $\triangle$ABD の面積が $\triangle$ABC と等しくなるような点 D は直線 AB について C と反対側の領域にも取ることができ，その条件は AB に並行で AB と①で求めた直線と等しい距離だけ離れた直線上にあればよい．したがってその直線の式は傾きが $\dfrac{1}{2}$ で

$$y=\frac{1}{2}x+d \qquad (d<2)$$

と書ける．点 C′ と直線 AB の y 切片との距離は

$$12-2=10$$

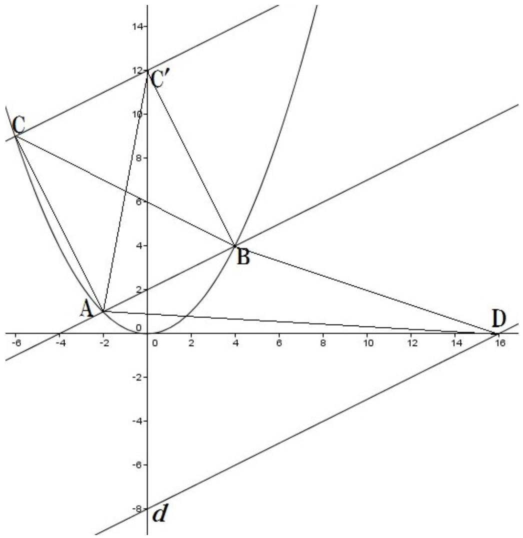
よって直線 AB の y 切片と d との距離も 10．ゆえに

$$2-d=10$$
$$-d=8$$
$$\therefore d=-8$$
$$\therefore y=\frac{1}{2}x-8$$

この直線と x 軸との交点は直線の式に $y=0$ を代入して

$$0=\frac{1}{2}x-8$$
$$\therefore x=16$$

よって求める座標は D$(16,0)$.



4

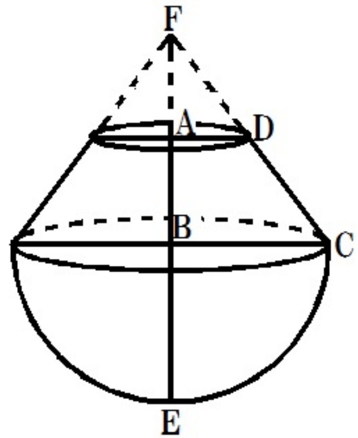
(1)

BC を 1 回転させる面で分けると，上は円錐から上部を切り取った図形，下は半球.

上は AB の延長とを DC の延長を F としたとき，$\triangle$FAD∽$\triangle$FBC で，

FB $=8$, FA $=4$ (中点連結定理)．よって

$$上=\underbrace{\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8}_{\triangle\text{FBC の回転}}-\underbrace{\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4}_{\triangle\text{FAD の回転}}$$
$$=96\pi-12\pi$$
$$=84\pi$$



下は半径 6 の半球なので

$$下=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi\times6^3}{3}$$
$$=144\pi$$

以上より求める体積は

$$84\pi+144\pi=228\pi\ \ \mathrm{cm}^3$$

注) 上は立体図形の相似比を使うと，相似比は 2 : 1 なので

$$\left(\frac{1}{3}\times\pi\times6^2\times8\right)\times\frac{2^3-1}{2^3}=96\pi\times\frac{7}{8}$$
$$=84\pi$$

(2)

AD $=6$

$\triangle$BAC, $\triangle$BAD, $\triangle$BCD は直角二等辺三角形

$\triangle$ACD は正三角形

①

$\triangle$ABD で

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AD} = 1 : \sqrt{2}$$
$$\mathrm{AB} : 6 = 1 : \sqrt{2}$$
$$\therefore \sqrt{2}\,\mathrm{AB} = 6$$
$$\therefore \mathrm{AB} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\ \mathrm{cm}$$

②

AD の中点を E とすると AE ⊥ CE, AE $= 3$, CE $= 3\sqrt{3}$ ($\angle$CAE $= 60^\circ$).
よって $\triangle$ACD の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\times \mathrm{AD}\times\times \mathrm{CE} = \frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$$

③

$\triangle$BAC を底面としたとき，立体 K の高さは BD.
よって立体 K の体積は

$$\frac{1}{3}\times\underbrace{\left\{\frac{1}{2}\times\left(3\sqrt{2}\right)^2\right\}}_{\triangle\mathrm{BAC}}\times\underbrace{3\sqrt{2}}_{\mathrm{BD}} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 9\times 2\times 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

よって立体 K の体積を V，求める高さを h とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh$$
$$9\sqrt{2} = \frac{1}{3}\times 9\sqrt{3}\times h$$
$$3\sqrt{2} = \sqrt{3}\,h$$
$$\therefore h = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}\ \mathrm{cm}$$

④

展開図で B, P, Q (,B) が直線になるとき，線分 BP, PQ, QB の長さの和が最小となる.

$$\angle\mathrm{DBP} = \angle\mathrm{DBQ} = \frac{1}{2}\{180^\circ - (45^\circ + 60^\circ + 45^\circ)\} = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = \frac{1}{2}\times 30^\circ = 15^\circ$$

$\triangle$BAD で B から AD に下ろした垂線と AD との交点を R とすると

$$\mathrm{AR} = 3$$
$$\mathrm{BR} = 3$$
$$\angle\mathrm{PBR} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

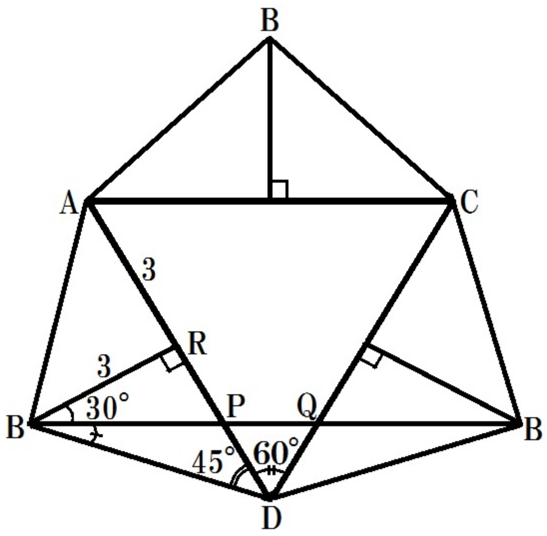
図より

$$RP : BR = 1 : \sqrt{3}$$

$$RP : 3 = 1 : \sqrt{3}$$

$$\therefore \sqrt{3}\,RP = 3$$

$$\therefore RP = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$



$$BP = 2RP = 2\sqrt{3}$$

$$AP = AR + RP = 3 + \sqrt{3}$$

△DAC∽△DPQ で相似比は

$$6 : \{6 - (3 + \sqrt{3})\} = 6 : (3 - \sqrt{3})$$

よって

$$PQ = AC \times \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = 6 \times \frac{3 - \sqrt{3}}{6} = 3 - \sqrt{3}$$

以上より求める長さは

$$2BP + PQ = 2 \times 2\sqrt{3} + (3 - \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 3 - \sqrt{3} = 3 + 3\sqrt{3}\ \text{cm}$$

5

(1)

△AEF と △BFE において，			(1)
共通だから，	$\boxed{EF = FE}$	…①	(2)
同じ弧に対する円周角の大きさは等しいから，	$\angle EAF = \angle FBE$	…②	(3)
EF // AB より，錯角は等しいから，	$\angle AFE = \boxed{\angle BAF}$	…③	(4)
同じ弧に対する円周角の大きさは等しいから，	$\angle BEF = \boxed{\angle BAF}$	…④	(5)
③，④より，	$\angle AFE = \angle BEF$	…⑤	(6)
三角形の 3 つの内角の和が 180°であることと，②，⑤から，	$\angle AEF = \angle BFE$	…⑥	(7)
①，⑤，⑥より，$\boxed{\text{1 辺とその両端の角}}$ がそれぞれ等しいので，			(8)
	△AFE ≡ △BFE		(9)

(ア) ： EF = FE

(イ) ： ∠BAF

(ウ) ： 1 辺とその両端の角

注）(イ) について，(5) 行を考慮して公式の解答と変更を行った.

(2)

[証明]　$\triangle AEG$ と $\triangle ABC$ において，弧 AC に対する円周角より

$\angle AEC = \angle ABC$

すなわち

$\angle AEG = \angle ABC$　……①

BC = BD より $\triangle BCD$ において

$\angle BCD = \angle BDC$　……②

対頂角の関係より

$\angle BDC = \angle ADE$　……③

①，③より $\triangle BDC \backsim \triangle EDA$ で

$\angle BCD = \angle EAD$　……④

②，④より

$\angle BDC = \angle EAD$　……⑤

弧 FB に対する円周角より

$\angle FEB = \angle FAB$　……⑥

EF // AB より同位角の関係から

$\angle BDC = \angle FED$　……⑦

⑤，⑦より

$\angle EAD = \angle FED$　……⑧

⑥，⑧より

$\angle EAG = \angle BEC$　……⑨

$(= \angle FED - \angle FEB)$

弧 BC に対する円周角より

$\angle BEC = \angle BAC$　……⑩

⑨，⑩より

$\angle EAG = \angle BAC$　……⑪

①，⑪より，2 組の角がそれぞれ等しいので

$\triangle AEG \backsim \triangle ABC$

Q.E.D.

(3)

①

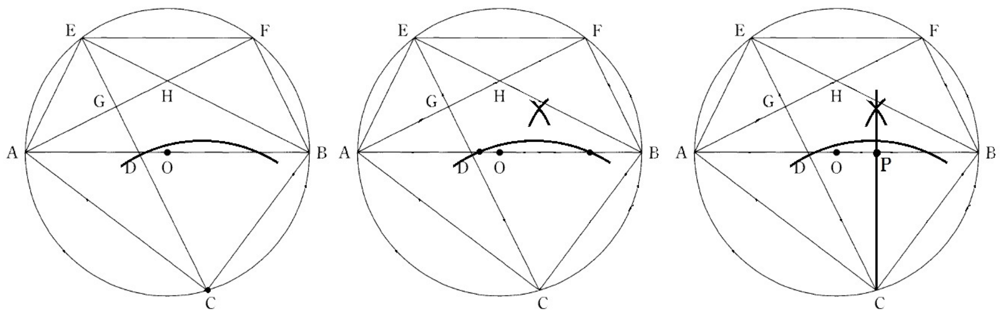
$\triangle ABC \backsim \triangle CBP$ で，円 O の直径 AB に対する円周角より

$\angle ACB = 90^\circ$

よって

$\angle CPB = 90^\circ$

ゆえに点 C から線分 AB への垂線を作図して，その垂線と AB との交点が P となる．



②

(ア)

$\angle ACB = 90^\circ$ より三平方の定理から

$$\begin{aligned} CB &= \sqrt{AB^2 - AC^2} \\ &= \sqrt{10^2 - 8^2} \\ &= \sqrt{100 - 64} \\ &= \sqrt{36} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$\triangle ABC \backsim \triangle CBP$ より

$$AB : CB = AC : CP$$
$$10 : 6 = 8 : CP$$
$$\therefore 10\,CP = 48$$
$$\therefore CP = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}\ \text{cm}$$

(イ)

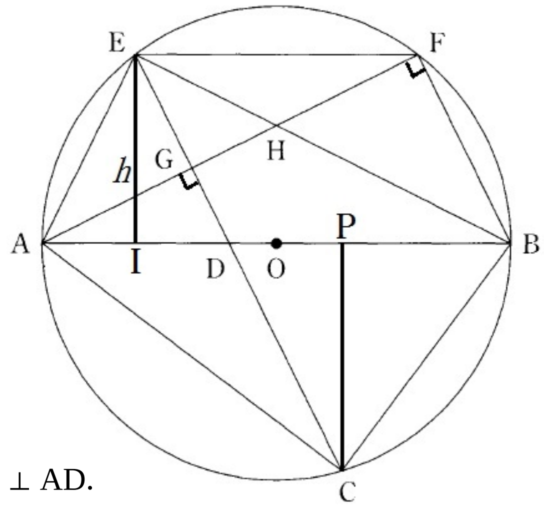
(2)より $\triangle BDC \backsim \triangle EDA$ で，$BD = BC$，$ED = EA$ である．

$\triangle ABC \backsim \triangle CBP$ より

$$AC : CP = CB : PB$$
$$8 : \frac{24}{5} = 6 : PB$$
$$\therefore 8PB = \frac{24}{5} \times 6$$
$$\therefore PB = \frac{18}{5}$$

よって

$$\begin{aligned} DP &= DB - PB \\ &= 6 - \frac{18}{5} \\ &= \frac{12}{5} \end{aligned}$$



また

$$\begin{aligned} AD &= AB - DB \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

ここで AD の中点を I とすると $EI \perp AD$.

よって $\triangle DPC \backsim \triangle DIE$（$\angle PDC = \angle IDE$, $\angle DPC = \angle DIE$).

また

$$\begin{aligned} DI &= \frac{1}{2}AD \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

よって $EI = h$ とおくと，h は $\triangle EAD$ で AD を底辺と見たときの高さで

$$CP : EI = DP : DI$$
$$\frac{24}{5} : h = \frac{12}{5} : 2$$
$$\frac{12}{5}h = \frac{24}{5} \times 2$$
$$\therefore h = 4$$

(2)より $\angle AGE = \angle ACB = 90^\circ$．よって $\angle AGD = 90^\circ$．また，直径 AB に対する円周角より $\angle AFB = 90^\circ$ であるから同位角の関係より $EC \,/\!/\, FB$．ゆえに四角形 DBFE は平行四辺形であり $EF = DB = 6$.

また，$\triangle GEF \backsim \triangle GDA$ で相似比は $EF : DA = 6 : 4$，$\triangle HAB \backsim \triangle HFE$ で相似比は $10 : 6$.

以上より

$$\begin{aligned} \triangle EAB &= \frac{1}{2} \times 10 \times h \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \triangle HAB &= \triangle EAB \times \frac{10}{10+6} \\ &= 20 \times \frac{10}{16} \\ &= \frac{25}{2} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \triangle GDA &= \triangle EDA \times \frac{4}{6+4} \\ &= 8 \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{16}{5} \end{aligned}$$

よって求める面積は

$$\begin{aligned} \triangle HAB - \triangle GDA &= \frac{25}{2} - \frac{16}{5} \\ &= \frac{125}{10} - \frac{32}{10} \\ &= \frac{93}{10}\ \text{cm}^2 \end{aligned}$$

注) 途中式中の記号 ∴ は「よって」の意味．また，最終的な答え以外では cm などの単位は省略した．

総評

出題傾向が変わって 2 回目の試験となる．前年は最後の5より4が最も難しい問題であったのに対し，今回はそれ以前の出題傾向と同様に5の一番最後に最も難しい問題が置かれた．また，図形証明問題も穴埋めと全体を記述する 2 題が出題された．1の小問集合は標準的な内容．(7)の割合に関する問題は毎年出題されて傾向も同じなので確実におさえておきたい．2文章題誘導は易化したが，統計に関する問題が後期試験としては初めて出題された．確率は P，C による計算を知っていると素早く解ける問題だが，知らなくても大きな差は出ない内容であった (比較：23 年度後期)．3は関数と等積変形で，特に(4)は AB に対して C と反対側に気付くかというところが問われており，23 年度の類題となっている．4は入試問題として標準的であるが，(2)④は計算力を必要とされてやや難．5は(3)の作図が簡単であったので先に手をつけておきたいところ．(2)の証明と(3)②は与えられた図形に相似な図形が多く含まれているため，必要なものを見極めて整理することが必要．最後の問題は恒例の答えが汚い数字になる問題であるが，三平方の定理を多用して解くこともできるが，二等辺三角形や平行四辺形といった 2 年生の図形の知識をしっかり使って相似比の計算によって求めていくと計算がずっと楽になるという良問.

作成：松田 一真（K’s Massenburg Lab）
http://k-m-l.jp