平成 24 年度前期選抜学力検査　詳解

1

(1)

$$3-2\times(-5)=3+10$$
$$=13$$

(2)

$$(9x-10)-2(x-5)=9x-10-2x+10$$
$$=(9-2)x-10+10$$
$$=7x$$

(3)

$$0.1x+2=2.5$$
$$x+20=25$$
$$x=25-20$$
$$=5$$

(4)

$$3x^2+5x+1=0$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-12}}{6}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

(5)

①

まず班長を選ぶ：5 通り

残り 4 人から副班長を選ぶ：4 通り

$\therefore 5\times4=20$ 通り

②

5 人から 2 人を選ぶ選び方は ${}_5C_2$ 通り.

A をデザート係りに決める.

残り 4 人からもう 1 人のデザート係りを決めるので 4 通り.

よって求める確率は

$$\therefore \frac{4}{{}_5C_2}=\frac{4}{\frac{5\times4}{2\times1}}=\frac{4}{10}$$
$$=\frac{2}{5}$$

(6)

白い面が見えない側にくるように組み立てる.

答えは (あ)

図 1

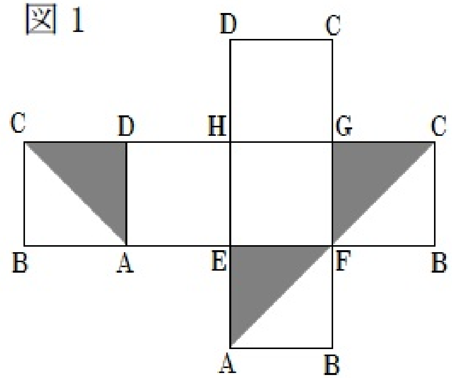
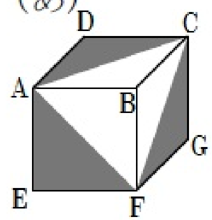


図 2

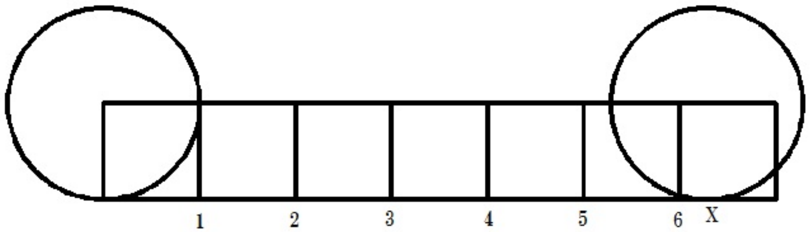
(あ)



(7)

1 目もりを 1 とすると円 O の円周は $2\pi \fallingdotseq 6.28$

X から右へ約 6.28 のところに X がくるので答えは D.



(8)

$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{AEC} = 72^\circ$

$\angle\mathrm{AEF} = \angle\mathrm{CEF} = 36^\circ$,

$\angle\mathrm{AEB} = a$

$\angle\mathrm{BCE} = b$

とおくと円周角の定理より図のようになる.

$\angle\mathrm{BFE} = b$

$\angle\mathrm{DFB} = \dfrac{b}{2}$

より求める角は

$b + \dfrac{a}{2}$

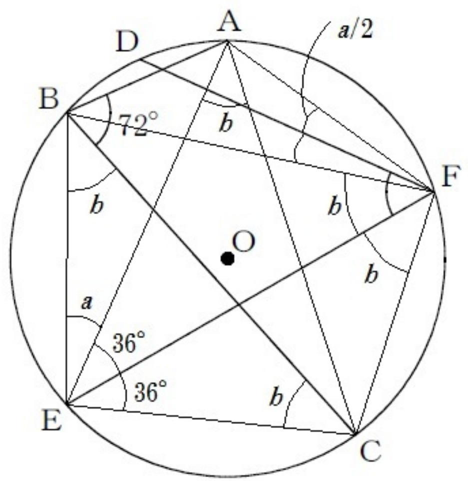
$\triangle\mathrm{EBC}$ において

$$72^\circ + a + 2b = 180^\circ$$

$$a + 2b = 108^\circ$$

$$\therefore \frac{a}{2} + b = 54^\circ$$

$$\therefore \angle\mathrm{DFE} = 54^\circ$$



(9)

はじめの売り値は

$$a \times \left(1 + \frac{b}{100}\right) \text{ 円}$$

新しい売り値は

$$a\left(1 + \frac{b}{100}\right)\left(1 - \frac{b}{100}\right) = a\left(1 - \frac{b^2}{10000}\right) \text{ 円}$$

差額は

$$a - a\left(1 - \frac{b^2}{10000}\right) = \frac{ab^2}{10000} \text{ 円}$$

$\boxed{2}$

(1)

まず x, y を何にしたかを考える.

$x + y = 2400$ より x, y は道のりで単位は m.

もう 1 つの式は時間の式になる.

$$\frac{x}{60} + 5 + \frac{y}{180} = 35$$

$$\therefore \frac{x}{60} + \frac{y}{180} + 5 = 35$$

よって答えは (う)

(2)

$$\begin{cases} x + y = 2400 & \cdots\cdots(☆) \\ \dfrac{x}{60} + \dfrac{y}{180} + 5 = 35 & \cdots\cdots(★) \end{cases}$$

(☆) より

$$y = 2400 - x \qquad \cdots\cdots(\flat)$$

$(\bigstar)$ より

$$3x + y = 30 \times 180$$
$$\therefore 3x + y = 5400 \qquad \cdots\cdots(\sharp)$$

$(\flat)$ を $(\sharp)$ へ代入して

$$\begin{aligned} 3x + (2400 - x) &= 5400 \\ 2x &= 3000 \\ x &= 1500 \end{aligned}$$

$(\flat)$ より

$$\begin{aligned} y &= 2400 - 1500 \\ &= 900 \end{aligned}$$

よって歩いた時間は

$$\frac{1500}{60} = 25 \text{ 分}$$

走った時間は

$$\frac{900}{180} = 5 \text{ 分}$$

[一般的な解法]

歩いた時間を x 分，走った時間を y 分とする．

単位について 2.4 km → 2400 m で [m]，[分]，[m/分] にそろえる．

$$x + 5 + y = 35 \qquad \cdots\cdots(\text{ア})$$
$$60x + 180y = 2400 \qquad \cdots\cdots(\text{イ})$$

(ア) より

$$x + y = 30$$
$$y = 30 - x \qquad \cdots\cdots(\text{ウ})$$

(ウ) を (イ) へ代入して

$$\begin{aligned} 60x + 180(30 - x) &= 2400 \\ 60x + 5400 - 180x &= 2400 \\ -120x &= -3000 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

(ウ) より

$$\begin{aligned} y &= 30 - 25 \\ &= 5 \end{aligned}$$

よって

歩いた時間　25 分

走った時間　5 分

$\boxed{3}$

(1)

①

合同な三角形 ADE と GFE を作図して錯角 ($\angle$EAD $=$ $\angle$EGF) より平行な直線 n を作図している．

i) $\boxed{\text{え}}$ を適当にひいて G を決める

ii) AG の中点 E を $\boxed{\text{あ}}$ によって決める

iii) BH をひく → $\boxed{\text{い}}$

iv) AE $=$ GE，$\angle$AEB $=$ $\angle$GEH（錯角）より 2 辺とその間の角，かつ F が m 上にあるように作図する → $\boxed{\text{う}}$

以上より $\triangle$ADE と $\triangle$GFE が作図できたので，AD を n とすれば $m \parallel n$ となる．

$\therefore$ $\boxed{\text{え}} \to \boxed{\text{あ}} \to \boxed{\text{い}} \to \boxed{\text{う}}$

②

iv) の作図より E と F

⑵

①

(1) ① より 2 辺とその間の角がそれぞれ等しい.

②

合同な図形では対応する角は等しいので

$$\angle \mathrm{EAD} = \angle \mathrm{EGF} \qquad \cdots\cdots\langle 1\rangle$$

$\langle 1\rangle$ は錯角が等しいことを表しているので $m \parallel n$. よって

(ア) : 対応する角

(イ) : $\angle$EAD

(ウ) : $\angle$EGF

(エ) : 錯角

4

⑴

$y = ax^2 \qquad \cdots\cdots$ ㋐ が A$(3, 2)$ を通るので

$$2 = a \times 9$$

$$\therefore a = \frac{2}{9}$$

⑵

①

B$(0, 4)$

E と H の座標 (3 つまで) がわかれば，OA // BD // EG$\cdots$ より，できるひし形は相似なので法則性がわかる.

OA の傾きは $\dfrac{2}{3}$.

直線 BD の式は

$$y = \frac{2}{3}x + 4$$

㋐ : $y = \dfrac{2}{9}x^2$ と連立して

$$\frac{2}{9}x^2 = \frac{2}{3}x + 4$$

$$x^2 = 3x + 18$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x-6)(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -3,\ 6$$

$$\mathrm{D}\left(6,\ \frac{2}{9} \times 36\right) \qquad \text{より} \qquad \mathrm{D}(6, 8)$$

よって FD と y 軸の交点を P とすると

$$\mathrm{P}(0, 8)$$

$\mathrm{PB} = 8 - 4 = 4$ なので

$$\mathrm{E}(0,\ 4 + 4 \times 2) \qquad \text{より} \qquad \mathrm{E}(0, 12)$$

直線 EG の式は

$$y=\frac{2}{3}x+12$$

$y=\frac{2}{9}x^2$ と連立して

$$\frac{2}{9}x^2=\frac{2}{3}x+12$$
$$x^2=3x+54$$
$$x^2-3x-54=0$$
$$(x-9)(x+6)=0$$
$$\therefore x=9,\ -6$$

よって

$$\mathrm{G}\left(9,\ \frac{2}{9}\times 9^2\right) \qquad \text{より} \qquad \mathrm{G}(9,18)$$

IG と y 軸の交点を Q とすると

$$\mathrm{Q}(0,18)$$

$\mathrm{QE}=18-12=6$ なので

$$\mathrm{H}\,(0,\ 12+6\times 2) \qquad \text{より} \qquad \mathrm{H}(0,24)$$

②

$\mathrm{OB}=4$, $\mathrm{BE}=8$, $\mathrm{EH}=12$.
ひし形の相似比は $1:2:3:\cdots$ となっている.
n 番目のひし形の面積を S_n で表すと

$$S_1=\frac{1}{2}\times 4\times 6$$
$$=12$$
$$S_2=S_1\times 2^2=12\times 4$$
$$=48$$
$$S_3=S_1\times 3^2=12\times 9$$
$$=108$$
$$S_4=S_1\times 4^2=12\times 16$$
$$=192\ \ \mathrm{cm}^2$$

一般に

$$S_n=S_1\times n^2$$
$$=12n^2$$

③

n 番目のトップの y 座標を y_n で表す.

$$y_1=4$$
$$y_2=12=4+8$$
$$=y_1+4\times 2$$
$$y_3=24=12+12=y_2+4\times 3$$
$$=y_1+4\times 2+4\times 3$$

よって

$$y_n=y_1+4\times 2+4\times 3+\cdots+4\times(n-1)+4\times n$$
$$=4+4\times 2+4\times 3+\cdots+4\times(n-1)+4\times n$$
$$=4\{1+2+3+\cdots+(n-1)+n\}$$

ここで

$$Sum_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

とおくと

$$\begin{array}{rrcl} & Sum_n & = & 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ +) & Sum_n & = & n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \\ \hline & 2\,Sum_n & = & \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)}_{n\text{ 個}} \end{array}$$

$$\therefore 2\,Sum_n = n(n+1)$$

$$Sum_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$n = 10$ のとき

$$Sum_{10} = \frac{10\times 11}{2} = 55$$

$y_n = 4\,Sum_n$ より

$$y_{10} = 4\,Sum_{10} = 4\times 55 = 220$$

よって求める座標は

$(0, 220)$

$\boxed{5}$

(1)

半径 6 cm の半球．

体積は

$$V = \frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times 6^3 = 144\pi\ \ \text{cm}^3$$

表面積は

$$S = \pi\times 6^2 + \frac{1}{2}\times 4\pi\times 6^2 = 3\pi\times 36 = 108\pi\ \ \text{cm}^2$$

(2)

①

$\triangle$AEG と $\triangle$DAF において

AE = DA　(半径)　$\cdots\cdots$(ア)

$\angle$EGA = $\angle$AFD = 90°　$\cdots\cdots$(イ)

弧 BD = 弧 CE より

$\angle$DAB = $\angle$EAC　$\cdots\cdots$(ウ)

CA // EG より

$\angle$EAC = $\angle$AEG　(錯角)　$\cdots\cdots$(エ)

(ウ)，(エ) より

$\angle$AEG = $\angle$DAF　$\cdots\cdots$(オ)

(ア)，(イ)，(オ) より，直角三角形の斜辺と 1 つの鋭角がそれぞれ等しいので

$\triangle$AEG $\equiv$ $\triangle$DAF

$\triangle$AEG = $\triangle$DAF = a，$\triangle$AGH = b とおくと

$\triangle$EAH = $a - b$　，　四角形 HGFD = $a - b$

よって題意は示された．

②

$$\text{弧 BC} = \frac{1}{4} \times 2 \times 6\pi$$
$$= 3\pi \ \ \text{cm}$$

$$\angle\text{BAD} = 90^\circ \times \frac{\frac{3}{5}\pi}{3\pi} = 90^\circ \times \frac{1}{5}$$
$$= 18^\circ$$

$\angle$BAD $= \angle$CAE より

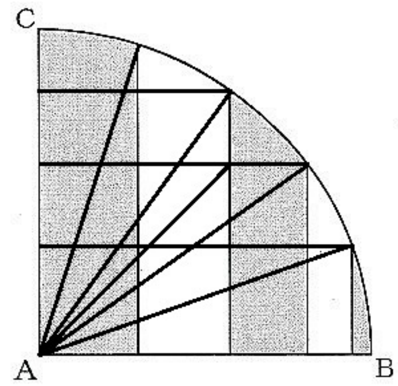
$$\angle\text{DAE} = 90^\circ - 18^\circ \times 2 = 90^\circ - 36^\circ$$
$$= 54^\circ$$

よって求める面積は

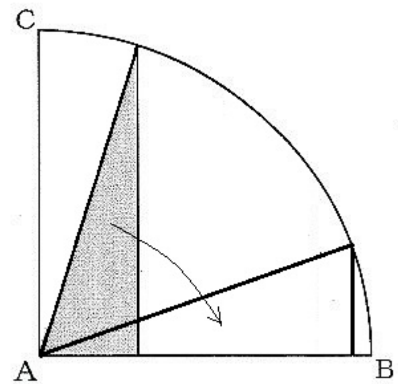
$$\pi \times 6^2 \times \frac{54}{360} = \pi \times 36 \times \frac{54}{360}$$
$$= \frac{54}{10}\pi$$
$$= \frac{27}{5}\pi \ \ \text{cm}^2$$

⑶

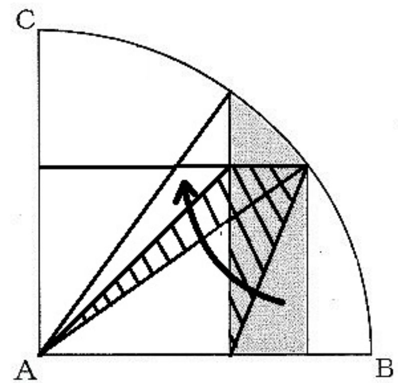
角度を等分した円周上の点から垂線を下したときの間隔を考えることは無理なので等積変形を考えるしかないが，このとき三角形と弧を含む部分に分割しないとできない (弧を含む部分の等積変形は考えっれない).
まず弧の交点から AB に水平な平行な直線をひいたときにできる図形の対称性に気付かないと変形ができない.



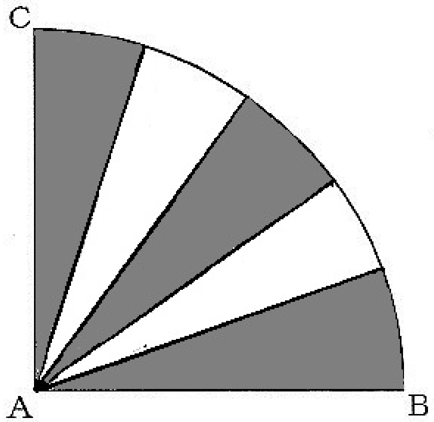
はじめに下図の図形の移動を考える.



問題は真ん中の部分の変形で等積変形と対称性を利用する．このときに水平な直線が考えられていないと厳しい.



結果として下図のように変形できることになる．



よって求める面積は

$$S = \pi \times 6^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \times 3$$
$$= \frac{27}{5}\pi \ \ \mathrm{cm}^2$$

中学数学の知識では最後の図のようにおうぎ形にもっていくしか方法はないので，その目標地点を意識してどのように変形すればよいか考えなければならない．

総評

全体として極端な難問は無いが，数学の総合的な理解が問われている．内容と問題量から考えて制限時間の制約があるとかなり厳しいと思われる．しかし，無意味に難しいわけではなく良問がそろっているので，時間をかけて理解するには非常に有用といえる．$\boxed{4}$ (2)については難関私立高であれば具体的に何番目ではなく一般の n 番目のときの値を問われるか，もしくは極端に大きな数について「何番目」が問われるところで，結局順番に計算するのではなく法則性を見抜いているかを問われることになる．

作成：松田 一真（K’s Massenburg Lab）
http://k-m-l.jp