平成 24 年度学力検査　数学　詳解

1

(1)

$$5-5\times(-6)=5+30$$
$$=35$$

(2)

$$\left(-\frac{9}{7}\right)\div\frac{3}{2}=-\frac{9}{7}\times\frac{2}{3}$$
$$=-\frac{6}{7}$$

(3)

$$-3(a-4b)+4(2a-b)=-3a+12b+8a-4b$$
$$=(-3+8)a+(12-4)b$$
$$=5a+8b$$

(4)

$$\begin{cases} 5x-y=11 & \cdots\cdots(ア) \\ x+3y=15 & \cdots\cdots(イ) \end{cases}$$

(イ) より

$$x=-3y+15 \qquad \cdots\cdots(ウ)$$

(ウ) を (ア) へ代入して

$$5(-3y+15)-y=11$$
$$-15y+75-y=11$$
$$-16y=-64$$
$$y=4$$

(ウ) より

$$x=-3\times4+15$$
$$=-12+15$$
$$=3$$

$$\therefore\ (x,y)=(3,4)$$

(5)

$$(x-6)(s+3)=4x$$
$$x^2-3x-18=4x$$
$$x^2-7x-18=0$$
$$(x-9)(x+2)=0$$
$$\therefore\ x=-2,\ 9$$

(6)

$$\sqrt{45}-2\sqrt{20}+\frac{10}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}-2\times2\sqrt{5}+\frac{10\sqrt{5}}{5}$$
$$=3\sqrt{5}-4\sqrt{5}+2\sqrt{5}$$
$$=(3-4+2)\sqrt{5}$$
$$=\sqrt{5}$$

(7)

x 円の 25% 引きは

$$x\left(1-\frac{25}{100}\right)=x\left(1-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{3}{4}x\ \text{円}$$

$$\therefore \frac{3}{4}x = 1650$$

$$x = 1650 \times \frac{4}{3}$$

$$= 2200$$

2

(1)

子どもの人数を x 人として一次方程式をつくると

$$\boxed{6x + 26 = 7x - 4}$$

これを解くと $\boxed{x = 30}$

このことから子どもの人数は $\boxed{30}$ 人，あめの個数は $\boxed{206}$ 個

また，次の一次方程式を使って求めることもできる．

あめの個数を y 個として一次方程式をつくると

$$\boxed{\frac{y-26}{6} = \frac{y+4}{7}}$$

Point

子どもの人数を x 人としたときはあめの個数を表す式になり，あめの個数を y 個としたときは子どもの人数を表す式になる．

(2)

すべての場合の数は $6 \times 6 = 36$ 通り

①

$(a, b) =$ $(1,3)$，$(1,6)$

$(2,3)$，$(2,6)$

$(3,1)$，$(3,2)$，$(3,3)$，$(3,4)$，$(3,5)$，$(3,6)$

$(4,3)$，$(4,6)$

$(5,3)$，$(5,6)$

$(6,1)$，$(6,2)$，$(6,3)$，$(6,4)$，$(6,5)$，$(6,6)$

$\therefore$ 20 通り

②

$p = 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$

i) $p = 1$ のとき

$(a, b) = (1, 1)$

1 通り

ii) $p = 4$ のとき

$(a, b) = (1, 4)$，$(2, 2)$，$(4, 1)$

iii) $p = 9$ のとき

3 通り

$(a, b) = (3, 3)$

iv) $p = 16$ のとき

$(a, b) = (4, 4)$

1 通り

v) $p = 25$ のとき

$(a, b) = (5, 5)$

1 通り

vi) $p=36$ のとき

$(a,b)=(6,6)$

1 通り

i)〜vi) より

$1+3+1+1+1+1=8$ 通り

よって求める確率は

$$\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

(3)

①

$$4x+5y=20$$

に $x=0$ を代入すると

$5y=20$

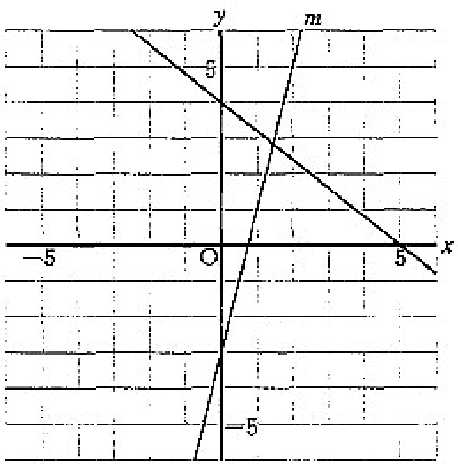
$\therefore y=4$

$y=0$ を代入すると

$4x=20$

$\therefore x=5$

よって，$(x,y)=(0,4)$, $(5,0)$ を通る直線をかけばよい.



②

$$m\ :\ y=4x-3$$

これを $4x+5y=20$ に代入して

$$4x+5(4x-3)=20$$
$$4x+20x-15=20$$
$$24x=35$$
$$x=\frac{35}{24}$$

m の式より

$$y=4\times\frac{35}{24}-3$$
$$=\frac{35}{6}-3=\frac{35}{6}-\frac{18}{6}$$
$$=\frac{17}{6}$$

$$\therefore (x,y)=\left(\frac{35}{24},\frac{17}{6}\right)$$

$\boxed{3}$

(1)

$y=ax^2$　　$\cdots\cdots$ ㋐

A$(6,p)$

B$(-4,4)$

B が㋐のグラフを通ることより

$$4=a\times(-4)^2$$
$$4=16a$$
$$\therefore a=\frac{1}{4}$$

㋐ ： $y = \frac{1}{4}x^2$

A について，$x = 6$ を㋐の式に代入して

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4} \times 6^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 36 \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4},\ p = 9$$

⑵

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(-4+0) &= \frac{1}{4} \times (-4) \\ &= -1 \end{aligned}$$

⑶

A$(6, 9)$

B$(-4, 4)$

求める直線の式を $y = bx + c$ とすると A を通ることより

$9 = 6b + c \qquad \cdots\cdots(イ)$

B を通ることより

$4 = -4b + c \qquad \cdots\cdots(ウ)$

$(イ) - (ウ)$ より

$$\begin{array}{rrcr} & 9 & = & 6b + c \\ -) & 4 & = & -\ 4b + c \\ \hline & 5 & = & 10b \\ & b & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

(ウ) より

$$\begin{aligned} 4 &= -4 \times \frac{1}{2} + c \\ 4 &= -2 + c \\ \therefore c &= 6 \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + 6$$

⑷

①

m の式に $y = 0$ を代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}x + 6 \\ \frac{1}{2}x &= -6 \\ \therefore x &= -12 \end{aligned}$$

B′$(0, 4)$ とすると，求める体積は △OB′C を x 軸を軸として 1 回転させてできる立体の体積に等しい.

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 12 &= \pi \times 16 \times 4 \\ &= 64\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

②

直線 OD の式は

$$y = \frac{1}{2}x$$

これと㋐のグラフの交点は

$$\frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x^2$$
$$x^2 - 2x = 0$$
$$x(x-2) = 0$$
$$\therefore x = 0,\ 2$$

よって D の x 座標は 2．OD の式より

$$y = \frac{1}{2} \times 2$$
$$= 1$$

$$\therefore \mathrm{D}(2, 1)$$

等積変形により △ACD の面積は △ACO に等しい．このとき 2 つの図形で △ABO の部分が共通になるので △BCO と面積が等しくなるように △BEO をつくればよいので，C を通り OB に平行な直線と直線 OD の交点が E になる．

C を通り OB に平行な直線は傾きが −1 なので $y = -x + d$ とおくと，$\mathrm{C}(12, 0)$ を通るから

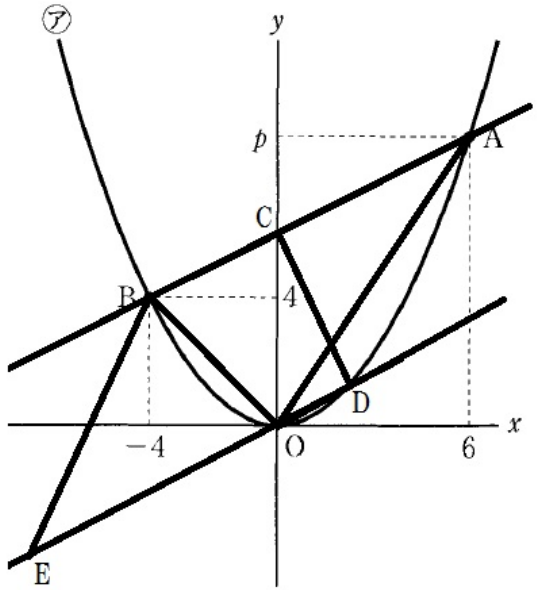
$$0 = -12 + d$$
$$\therefore d = -12$$
$$\therefore y = -x - 12$$

これと $y = \frac{1}{2}x$ を連立して

$$\frac{1}{2}x = -x - 12$$
$$x = -2x - 24$$
$$3x = -24$$
$$x = -8$$

$$y = -(-8) - 12$$
$$= 8 - 12$$
$$= -4$$

$$\therefore \mathrm{E}(-8, -4)$$



4

(1)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & & b & & c & & d & & e & & f \\
& \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
& a+b & & b+c & & c+d & & d+e & & e+f & \\
& & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
& & a+2b+c & & b+2c+d & & c+2d+e & & d+2e+f & & \\
& & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
& & & a+3b+3c+d & & b+3c+3d+e & & c+3d+3e+f & & & \\
& & & & \vee & & \vee & & & & \\
& & & & a+4b+6c+4d+e & & b+4c+6d+4e+f & & & & \\
& & & & & \vee & & & & & \\
& & & & & a+5b+10c+10d+5e+f & & & & &
\end{array}$$

よって「結果」は

$$「結果」= a + 5b + 10c + 10d + 5e + f$$

⑵

$$「結果」= a + f + 5(b + e) + 10(c + d)$$

「結果」$_{\min}$ は $(c+d)$ に (1 or 2)，$(b+e)$ に (3 or 4)，$(a+f)$ に (5 or 6) が入ればよい．よって

$$\begin{aligned}「結果」_{\min} &= 5 + 6 + 5(3+4) + 10(1+2) \\ &= 11 + 35 + 30 \\ &= 76\end{aligned}$$

⑶

$$a + f + 5(b + e) + 10(c + d) = 107$$

より

$$b + c = \frac{107 - (a+f) - 10(c+d)}{5} \qquad \cdots\cdots(ア)$$

$b+c$ は整数より $107-(a+f)$ は 5 の倍数.

$$\begin{cases} (a+f)_{\max} &= 6+5 \\ &= 11 \\ (a+f)_{\min} &= 1+2 \\ &= 3 \end{cases}$$

すなわち

$$107 - 11 = 96 \leqq 107 - (a+f) \leqq 104 = 107 - 3$$

したがって

$$107 - (a+f) = 100$$

ゆえに

$$a + f = 7$$

$$\therefore (a, f) = (1 \text{ or } 6),\ (2 \text{ or } 5),\ (3 \text{ or } 4)$$

$b+e$ について

$$3 \leqq b + c \leqq 11 \qquad \cdots\cdots(イ)$$

$c+d$ について

$$3 \leqq c + d \leqq 11 \qquad \cdots\cdots(ウ)$$

(ア) より

$$\begin{aligned} b + c &= \frac{107 - 7 - 10(c+d)}{5} \\ &= \frac{100 - 10(c+d)}{5} \\ &= 20 - 2(c+d) \end{aligned}$$

よって

$$c + d = \frac{20 - (b+e)}{2} \qquad \cdots\cdots(エ)$$

$c+d$ は整数より $b+e$ は 2 の倍数．(イ) を考慮して

$$b + e = 4,\ 6,\ 8,\ 10 \qquad \cdots\cdots(オ)$$

I) $(a, f) = (1 \text{ or } 6)$ のとき $\cancel{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ \cancel{6}$

$2 \leqq b + e \leqq 9$ と (オ) より

$b + e = 6,\ 8$

i) $b + e = 6$ すなわち $(b, e) = (2 \text{ or } 4)$ のとき $(c, d) = (3 \text{ or } 5)$

(エ) より $c + d = 7$　よって 不適

ii) $b + e = 8$ すなわち $(b, e) = (3 \text{ or } 5)$ のとき $(c, d) = (2 \text{ or } 4)$

(エ) より $c + d = 6$　よって 適する

II) $(a,f)=(2 \text{ or } 5)$ のとき $1\ \cancel{2}\ 3\ 4\ \cancel{5}\ 6$

$4 \leqq b+e \leqq 10$ と (オ) より

$b+e=4,\ 6,\ 8,\ 10$

i) $b+e=4$ すなわち $(b,e)=(1 \text{ or } 3)$ のとき $(c,d)=(4 \text{ or } 6)$

(エ) より $c+d=8$　よって 不適

ii) $b+e=6$ はありえない.　よって 不適

iii) $b+e=8$ はありえない.　よって 不適

iv) $b+e=10$ すなわち $(b,e)=(4 \text{ or } 6)$ のとき $(c,d)=(1 \text{ or } 3)$

(エ) より $c+d=5$　よって 不適

III) $(a,f)=(3 \text{ or } 4)$ のとき $1\ 2\ \cancel{3}\ \cancel{4}\ 5\ 6$

$3 \leqq b+e \leqq 11$ と (オ) より

$b+e=4,\ 6,\ 8,\ 10$

i) $b+e=4$ はありえない.　よって 不適

ii) $b+e=6$ すなわち $(b,e)=(1 \text{ or } 5)$ のとき $(c,d)=(2 \text{ or } 6)$

(エ) より $c+d=7$　よって 不適

iii) $b+e=8$ すなわち $(b,e)=(2 \text{ or } 6)$ のとき $(c,d)=(1 \text{ or } 5)$

(エ) より $c+d=6$　よって 適する

iv) $b+e=10$ はありえない.　よって 不適

以上より

$$\left\{\begin{array}{lcl}(a,f) & = & (1 \text{ or } 6)\\(b,e) & = & (3 \text{ or } 5)\\(c,d) & = & (2 \text{ or } 4)\end{array}\right. ,\quad \left\{\begin{array}{lcl}(a,f) & = & (3 \text{ or } 4)\\(b,e) & = & (2 \text{ or } 6)\\(c,d) & = & (1 \text{ or } 5)\end{array}\right.$$

よってすべての場合の数は

$2\times({}_2\mathrm{P}_2\times{}_2\mathrm{P}_2\times{}_2\mathrm{P}_2)=16$ 通り

[別解]

$$A=a+f+5(b+e)+10(c+d)$$

とおく．$A=107$，$b+e$ の係数が 5，$c+d$ の係数が 10 であることと

$$1+2=3 \leqq a+f \leqq 11=2+6$$

より $a+f=7$，$b+e$ は偶数でなければならない.

I) $(a,f)=(1,6)$ のとき $\cancel{1}\ 2\ 3\ 4\ 5\ \cancel{6}$

i) $b+e=2+4=6$ とすると $c+d=3+5=8$

$$\begin{aligned}A&=7+5\times6+10\times8\\&=7+30+80\\&=117\neq107\end{aligned}$$

よって 不適

ii) $b+e=3+5=8$ とすると $c+d=2+4=6$

$$\begin{aligned}A&=7+5\times8+10\times6\\&=7+40+60\\&=107\end{aligned}$$

よって 適する

II) $(a,f)=(2,5)$ のとき $1\ \cancel{2}\ 3\ 4\ \cancel{5}\ 6$

i) $b+e=1+3=4$ とすると $c+d=4+6=10$

$$\begin{aligned}A&=7+5\times4+10\times10\\&=7+20+100\\&=127\neq107\end{aligned}$$

よって 不適

ii) $b+e=4+6=10$ とすると $1+3=4$

$$\begin{aligned}A&=7+5\times10+10\times4\\&=7+50+40\\&=97\neq107\end{aligned}$$

よって 不適

III) $(a, f) = (3, 4)$ のとき 1 2 $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ 5 6

i) $b + e = 1 + 5 = 6$ とすると $c + d = 2 + 6 = 8$

$$\begin{aligned} A &= 7 + 5 \times 6 + 10 \times 8 \\ &= 7 + 30 + 80 \\ &= 117 \neq 107 \end{aligned}$$

よって <u>不適</u>

ii) $b + e = 2 + 6 = 8$ とすると $c + d = 1 + 5 = 6$

$$\begin{aligned} A &= 7 + 5 \times 8 + 10 \times 6 \\ &= 7 + 40 + 60 \\ &= 107 \end{aligned}$$

よって <u>適する</u>

以上より

$$\begin{cases} (a, f) = (1 \text{ or } 6) \\ (b, e) = (3 \text{ or } 5) \\ (c, d) = (2 \text{ or } 4) \end{cases} , \quad \begin{cases} (a, f) = (3 \text{ or } 4) \\ (b, e) = (2 \text{ or } 6) \\ (c, d) = (1 \text{ or } 5) \end{cases}$$

5

(1)

〈1〉 点 E，F をむすび，△AFE をつくる．

△ABC と △AFE において，仮定から

AB : AF = AC : AF ……①

共通しているから

∠BAC = $\boxed{\angle\text{FAE}}$ ……②

①，②より $\boxed{\text{2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい}}$ ので，

△ABC ∽ △AFE ……③

〈2〉 点 E，G をむすび，△AEG をつくる．

△AHB と △AEG において，

∠BAH = ∠GAE (共通) ……④

円周角の定理より

∠AFE = ∠AGE ……⑤

③より

∠AFE = ∠ABH ……⑥

⑤，⑥より

∠ABH = ∠AGE ……⑦

④，⑦より，2 組の角がそれぞれ等しいので

△AHB ∽ △AEG

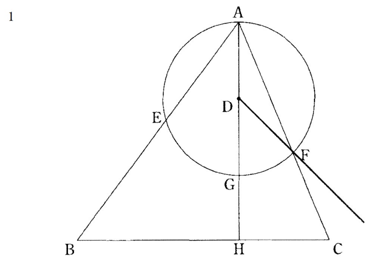
△AEG で AG は円 D の直径より

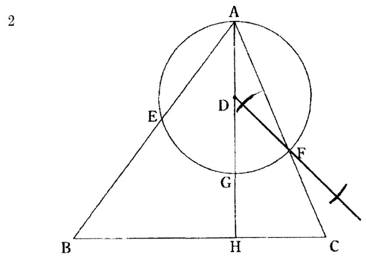
∠AEG = 90°

したがって，∠AHB = 90° なので，AH ⊥ BC

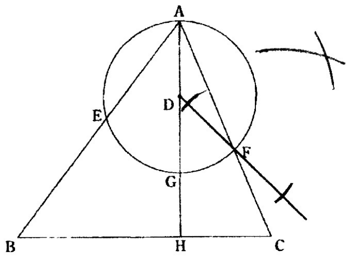
(2)

円の接線は半径と円周の交点で半径と垂直な関係になるから，直線 DF をひいて，F で DF と垂直な直線を作図すればよい．

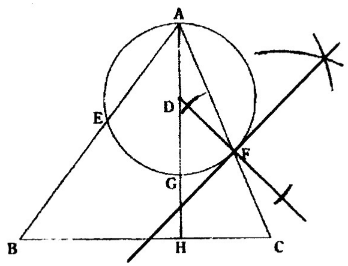




3



4



(3)

①

BH $= x$ とおくと CH $= 14 - x$

$$\mathrm{AH}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{CH}^2$$

$$\therefore 15^2 - x^2 = 13^2 - (14 - x)^2$$

$$225 - x^2 = 169 - 196 + 28x - x^2$$

$$252 = 28x$$

$$x = 9$$

よって AH は

$$\mathrm{AH} = \sqrt{15^2 - 9^2}$$

$$= \sqrt{225 - 81}$$

$$= \sqrt{144}$$

$$= 12$$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \times \mathrm{BC} \times \mathrm{AH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 12$$

$$= 84\ \ \mathrm{cm}^2$$

②

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AF} = \mathrm{AC} : \mathrm{AE} = m : n$$

より

$$15 : \mathrm{AF} = 14 : \mathrm{AE} = m : n \qquad \cdots\cdots(☆)$$

AD $= r$ とおくと AG $= 2r$.

$\triangle$ACH $\backsim \triangle$AGF で

$$13 : 2r = 5 : \mathrm{GF}$$

$$13\mathrm{GF} = 10r$$

$$\therefore \mathrm{GF} = \frac{10}{13}r$$

$\triangle$DGF $\backsim \triangle$HCF で

$\because$) $\triangle$DGF と $\triangle$HCF において

$\triangle$AGF $\backsim \triangle$ACH より

$$\angle \mathrm{AGF} = \angle \mathrm{ACH}$$

すなわち

$$\angle \mathrm{DGF} = \angle \mathrm{HCF}$$

また

$$\angle \mathrm{DFG} = \angle \mathrm{HFC} = 90^\circ - \angle \mathrm{GFH}$$

$$r : 5 = \mathrm{GF} : \mathrm{CF}$$

$$r : 5 = \frac{10}{13}r : \mathrm{CF}$$

$$r\,\mathrm{CF} = \frac{50}{13}r$$

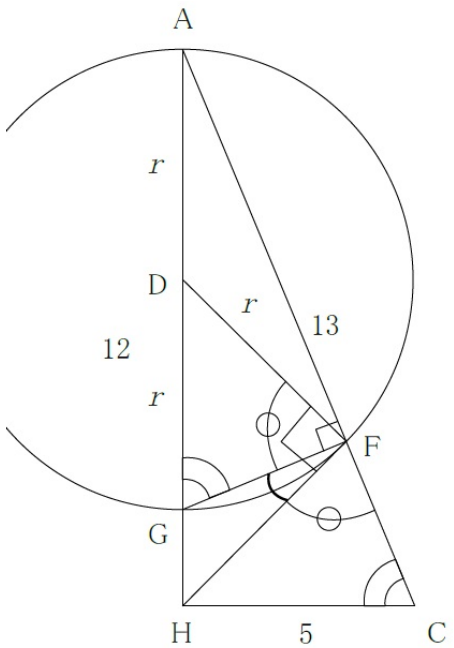
$$\therefore \mathrm{CF} = \frac{50}{13}$$

よって

$$\mathrm{AF} = \mathrm{AC} - \mathrm{CF}$$
$$= 13 - \frac{50}{13}$$
$$= \frac{119}{13}$$

これを (☆) へ代入して

$$15 : \frac{119}{13} = m : n$$
$$\therefore m : n = 195 : 119$$



総評

例年，最後の図形総合問題が最も難しい傾向にあるが，この年の問題は図形総合は一番最後の値こそ汚い数になったが比較的取り組みやすく，全体で最も難しい問題が $\boxed{4}$ の最後の場合の数を求める問題であった．条件を満たす組み合わせをすべて見つけることはかなり難しく，やはり時間的にかなり厳しいといえる．ところで，この $\boxed{4}$ の (1) はパスカルの三角形と関連していて，高校数学で学習する 2 項定理と関係がある．また，(2) は感覚的に数字を入れて答えを出すのはたいして難しくないが，そのプロセスを数学的に説明するのは非常に難しい．あたりまえのように思えることであるが，高校生になってこれを数学的に厳密に示すことができるだろうか．

作成：松田 一真（K’s Massenburg Lab）
http://k-m-l.jp