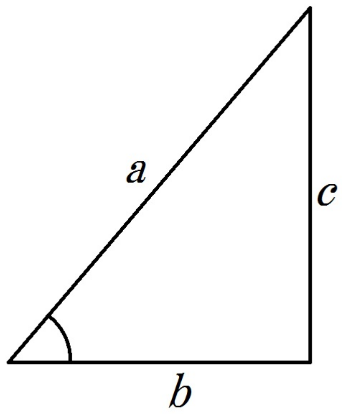
三角比の公式

定義より

$$\sin\theta = \frac{c}{a} \qquad \rightarrow \qquad c = a\sin\theta$$
$$\cos\theta = \frac{b}{a} \qquad \rightarrow \qquad b = a\cos\theta$$
$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{c}{b} = \frac{a\sin\theta}{a\cos\theta} \\ &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$



三平方の定理より

$$\begin{aligned}&c^2 + b^2 = a^2 \\ &(a\sin\theta)^2 + (a\cos\theta)^2 = a^2 \\ &a^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = a^2 \\ &\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}1 + \tan^2\theta &= 1 + \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta}\end{aligned}$$

$\tan\theta$ の 90° に関する公式

$$\begin{aligned}\tan(90^\circ-\theta) &= \frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}\\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\\ &= \frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\\ &= \frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(90^\circ+\theta) &= \frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)}\\ &= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta}\\ &= -\frac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}\\ &= -\frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

余弦定理は三平方の定理の拡張

余弦定理は三平方の定理の拡張，あるいは三平方の定理は余弦定理の特別な場合と見ることができます．実際，余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

で，$A = 90^\circ$ のとき $\cos A = 0$ なので

$$a^2 = b^2 + c^2$$

となります．三平方の定理からスタートすると，$\angle A$ が 90° からずれるときに $-2bc\cos A$ という項は三平方の定理の微調整の項と考えられます．

A が鋭角のとき，$\cos A > 0$ なので $-2bc\cos A < 0$．すなわち

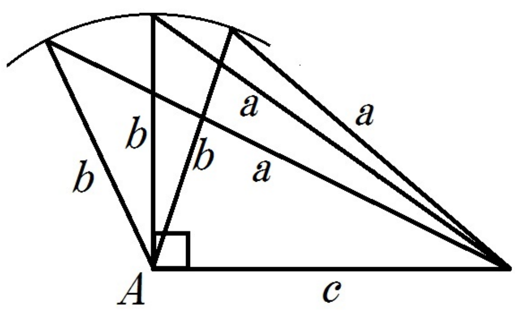
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A < b^2 + c^2$$

よって a は $A = 90^\circ$ のときより小さく (短く) なります．

A が鈍角のとき，$\cos A < 0$ なので $-2bc\cos A > 0$．すなわち

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A > b^2 + c^2$$

よって a は $A = 90^\circ$ のときより大きく (長く) なります．



オイラーの公式がすごい　(三角関数，数 II)

オイラーの公式

オイラー[a]の公式とは，指数関数と三角関数の間に成り立つ等式で

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

というものです．ここで

e　:　自然対数の底 (ネイピア数)，$= 2.71828\cdots\cdots$　(無理数)

i　:　虚数単位，$i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$

で，特に弧度法という角度で $\theta = \pi$ [rad]$(= 180^\circ)$ のとき，

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$
$$\therefore e^{i\pi} = -1$$

すなわち，オイラーの等式とも呼ばれる

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

は，無理数として重要な数である e と，円に関して欠かせない無理数である π と，虚数単位という存在するのか謎な (人間が考え出した？) 数である i と，整数で最も基本となる 0 と 1 が結びついた神々しい等式で，多くの数理科学者が「世界で最も美しい式」と挙げるものです．

[a] レオンハルト・オイラー（Leonhard Euler, 1707 年 - 1783 年）は数学者・物理学者であり，天文学者（天体物理学者）である．微積分成立以後の 18 世紀の数学の中心となって，続く 19 世紀の厳密化・抽象化時代の礎を築いたとされる．スイスのバーゼルに生まれ，現在のロシアのサンクトペテルブルクにて死去した．オイラーは人類史上最も多くの論文を書いた数学者であったと言われ，彼の論文は 5 万ページを超える全集にまとめられて 1911 年から刊行され続けているが，その全集は 100 年以上たった今日でも未だに完結していない．

このオイラーの公式を使って三角関数の種々の公式を導くこと (覚えなくてもいい！) ができます．準備として以下の性質を紹介しておきます．

累乗の性質 (数 II)

$$(a^\alpha)^2 = a^{2\alpha} \qquad , \qquad a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta$$

複素数の性質 (数 II)

$$a + ib = c + ib \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

三角関数の倍角の公式

オイラーの公式で θ を 2θ に置き換えると

$$e^{i2\theta} = \cos 2\theta + i \sin 2\theta \quad \cdots\cdots ①$$

一方

$$\begin{aligned} e^{i2\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^2 &= (\cos\theta + i\sin\theta)^2 \\ &= \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta + i^2\sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta + i\,2\sin\theta\cos\theta \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①, ②より複素数の性質から

$$\begin{cases} \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

三角関数の加法定理

オイラーの公式より

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \quad \cdots\cdots ③$$

一方

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{(i\alpha+i\beta)} \\ &= e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta} \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta \\ &= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i\,(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \quad \cdots\cdots ④ \end{aligned}$$

③, ④より

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \end{cases}$$

他にも色々導出できます.