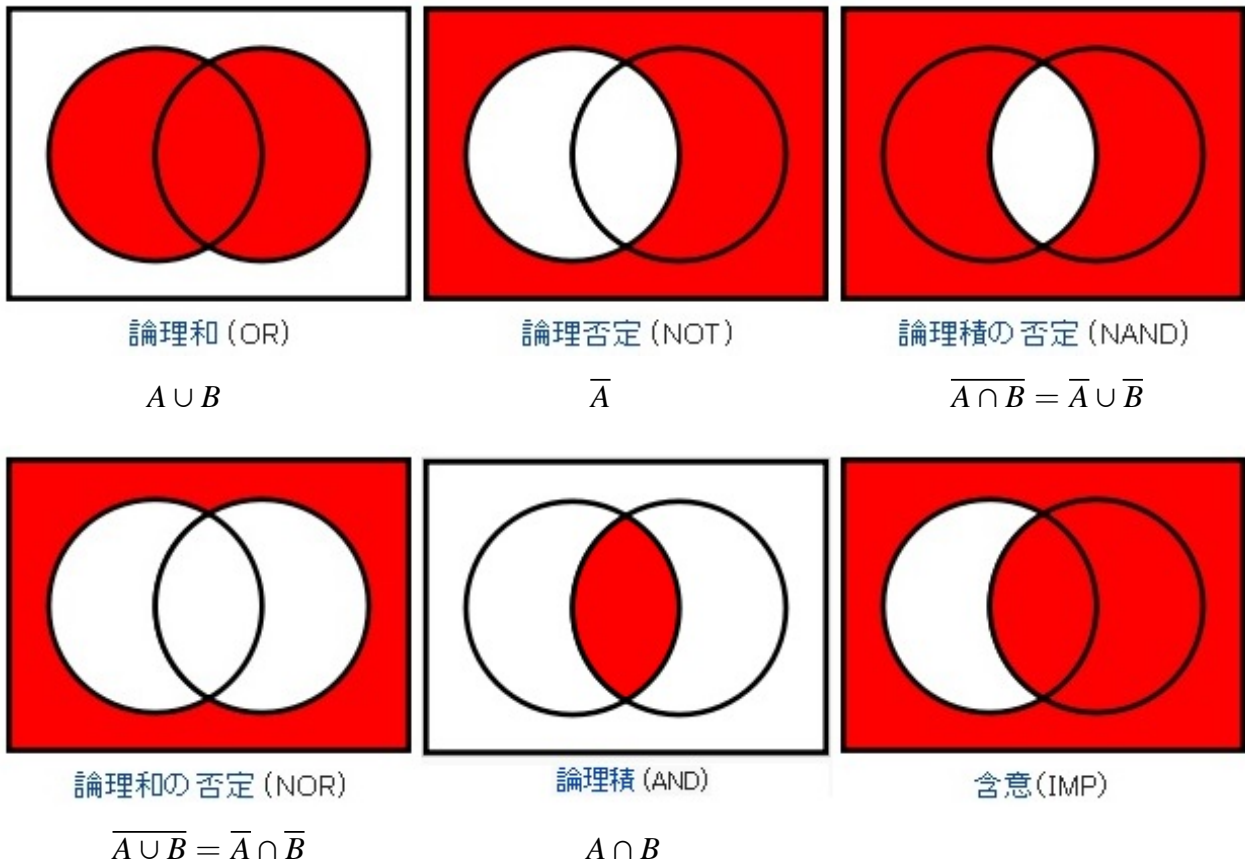


ベン図\*1を有効に使おう



## 命題

命題とは正しいか正しくないかが判断できる文や式のことです。命題として示されたことがらは正しくても正しくなくてもかまいませんが、数学的に正しいかどうか判断できるものでなければなりません。正しいことが証明された命題で重要なものを「定理」といいます。

## 数学における真偽

### 数学で真とは

ある命題が正しいとき、その命題は<sup>しん</sup>真であるといいます。命題が真であるとは、命題があらゆる条件で成立するということです。

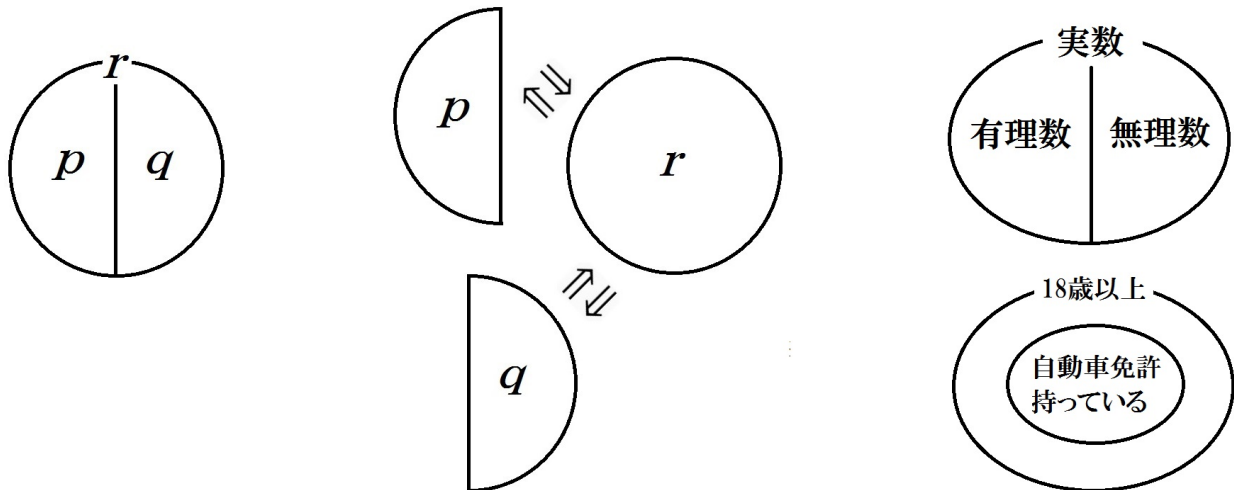
\*1 ベン図（ベンず、もしくはヴェン図、Venn diagram）とは、複数の集合の関係や、集合の範囲を視覚的に図式化したものである。イギリスの数学者ジョン・ベン（John Venn）によって考え出された。ベンにゆかりの深いケンブリッジ大学のゴンヴィル・アンド・キーズ・カレッジには、ベン図を描いたスタンドグラスがある。[Wikipedia]

## 数学で偽とは

与えられた命題が正しくないとき、その命題は偽であるといいます。このとき、命題が成立する条件が存在しても、ひとつでも成立しない条件が存在すれば、数学では偽であることとなります。したがって、命題が偽であることを示すにはその命題が成立しない例(反例)をひとつ挙げればよいこととなります。

## 必要条件・十分条件・必要十分条件

条件  $p$  と  $q$  で構成される条件  $r$  を考えてみましょう。



$p \Rightarrow r$  は成立する。

このとき、 $r$  は  $p$  であるために必要な ( $p$  を包含する) 条件。よって**必要条件**。

$p$  であれば必ず  $r$  が成立するので、 $p$  は  $r$  であるためには十分な条件。よって**十分条件**。

$r \Rightarrow p$  は成立するとは限らない(数学的には偽)。

例： $p$ ：有理数， $q$ ：無理数， $r$ ：実数

$p$  または  $q \Rightarrow r$ ， $r \Rightarrow p$  または  $q$ ，すなわち， $p$  または  $q \Leftrightarrow r$ 。

このとき、 $p$  かつ  $q$  は  $r$  であるための必要かつ十分条件。よって**必要十分条件**。

同様に  $r$  は  $p$  かつ  $q$  であるための必要十分条件。よって**必要十分条件**。

「必要十分条件である」とは「同値である」と言う場合があります。

### 必要とは何か考えてみよう

陥る例　　：　旅行かばんに入れる**必要**な荷物

正しい例　：　車の免許を取るのに**必要**な年齢

数学で必要条件・十分条件がわかりにくいのは、ここでの「必要」や「十分」が日常的な言葉ではなく、**数学用語**であるからです。従って、日常的な物事で必要・十分を考えると、正しければわかりやすい反面、全く逆になって間違ふことがあります。その他、数学で特別な使い方をする言葉として「適当な」「任意の」などがあります。

## 数学の証明

ここで学習することは、主に**条件の集合**を考えていくことになります。

### 数学の証明の方法

- ・ 数式による証明
- ・ 数学的帰納法による証明 (数 B)
- ・ 対偶による証明
- ・ 背理法による証明

### 対偶による証明の利用

「証明せよ」という問題でどう考えてもそれが直接証明できないときに対偶が成立しないか考えてみよう。

### 背理法の利用

「 $A$  が  $B$  であることを証明せよ」という問題で  $A$  が条件や集合として 2 つの条件や集合のどちらかしかありえない (つまり  $B$  かそれ以外の  $C$  しかありえない) 場合に、わざと成り立たないはずの方の仮定からスタートをして矛盾を導く方法です。上の「 $A$  が  $B$  であることを証明せよ」という例では、「 $A$  が  $C$  である」と仮定して矛盾が示せたら、 $A$  は  $B$  か  $C$  のどちらかでないといけないので結局「 $A$  は  $B$  であることになる」というわけです。具体例ではある実数は有理数か無理数かのどちらかなので、ある平方根が無理数であることを証明するときに使うことができます。