方程式と関数

$y = a(x-b)^2 + c$ の頂点が (b, c) である符号の謎

中学校の１次関数の落とし穴

　中学校で比例のグラフから 1 次関数へ進む時に

$$y = ax + b$$

は $y = ax$ を y 方向へ b 移動したグラフだと習い，それはとてもわかりやすい説明なのですが，実際

$$y = x + 2$$

は $y = x$ を y 方向へ 2 動かしたグラフという見方のほかに，$y = x$ を x 方向へ -2 動かしたグラフと見ても同じグラフになります．しかしこういう説明はされません．これはグラフが直線だからそれでもいいとなってしまうことなのです．ここで $y = x + 2$ は $y = x$ を y 方向へ動かすと 2 動かす，一方 x 方向へ動かすと -2 動かすことになる，この違いは y 方向へ動かすときは $y - 2 = x$ という形に書きで考えるように見方・考え方を変えることで解決することになります．

$y = x$ を y 方向へ 2 動かすときに考える式　：　$y - 2 = x$
$y = x$ を x 方向へ -2 動かすときに考える式　：　$y = x + 2$
$y = x$ を x 方向へ 2 動かすときに考える式　：　$y = x - 2$

2 次関数の頂点を考えるときに考えるべき式の形

　関数を動かすというのは，動かした後も同じ形を保たなければいけません．したがって，$y = f(x)$ を x 方向へ b，y 方向へ c 動かしたグラフの式は，まず結論を言うと

$$y - c = f(x - b)$$

となります．詳しく説明すると，$y = f(x)$ 上の点を x 方向へ b 移動した先を X，y 方向へ c 動かした先を Y とすると，

$$\begin{cases} x + b = X \\ y + c = Y \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x = X - b \\ y = Y - c \end{cases}$$

これが形として $Y = f(X)$ でなければならないので，$y = f(x)$ に代入すると

$$Y - c = f(X - b)$$

大文字を小文字に置き換えると

$$y - c = f(x - b)$$

が得られます．

では 2 次関数の頂点が見やすい形というのを具体的に考えると，$y = ax^2$ を x 方向へ b，y 方向へ c 動かしたグラフの式は

$$y - c = a(x - b)^2$$

ということになります．$y = ax^2$ の頂点は原点 $(0, 0)$ なので，動かしたグラフの頂点は (b, c) となります．
せっかくなので名前でも付けておきましょう．

$y = a(x - b)^2 + c$ ： 教科書平方完成型
$y - c = a(x - b)^2$ ： 頂点の座標わかりやすい型
$y = ax^2 + bx + c$ ： 2 次関数とわかりやすい型

方程式と関数をセットで考える

x の 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ は，関数 $y = ax^2 + bx + c$ と x 軸 $y = 0$ の連立方程式と見ることができます．

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$$

このように考えると，方程式の実数解の存在と関数のグラフの関係に強い結びつきがあることわかります．$y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との交点の x 座標が $ax^2 + bx + c = 0$ の解というわけです．
x の定義域が実数全体のとき，1 次方程式は 1 次関数がどこかで x 軸と交点をもつので必ず実数解が存在します．2 次方程式は 2 次関数のグラフの形からもわかるように x 軸との交点をもつとは限りません．したがって，2 次方程式は必ず実数解をもつとは限りません．同様に関数のグラフと照らし合わせて考えるとわかりやすいことですが，3 次方程式は必ず実数解を (少なくとも一つは) もちます．4 次方程式は実数解をもつとは限りません．

判別式

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

の平方根の中の $b^2 - 4ac$ というものが判別式と呼ばれるもので，一般に D で表します．

$$D = b^2 - 4ac$$

2 次方程式の解が実数であるためには解の公式の平方根の中が $\geqq 0$ でなければならず，その部分の正・負を調べることで実数解をもつかどうかが判断できるわけす．実際には重解の場合も考慮して

$$D > 0 \quad , \quad D = 0 \quad , \quad D < 0$$

のどれになるかを調べます．