

## 2重根号の裏ワザ？

2重根号をはずす計算って面倒臭いですよね。特に例えば  $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  みたいな問題。教科書的な説明だと

2重根号のはずし方

$\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}$  の2重根号をはずすには  $\sqrt{\alpha \pm 2\sqrt{\beta'}}$  の形に変形して  $\alpha = a + b$ ,  $\beta' = ab$  となる  $a, b$  を求めると  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$  となる(複合同順).

です.

例(1)

$$\begin{aligned}\sqrt{7 + \sqrt{48}} &= \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{(3+4) + 2\sqrt{3 \cdot 4}} = \sqrt{3} + \sqrt{4} \\ &= \sqrt{3} + 2\end{aligned}$$

例(2)

$$\begin{aligned}\sqrt{2 + \sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{(1+3) + 2\sqrt{1 \cdot 3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

そこでもっと簡単な方法がないか考えました。例(2)の問題の場合、 $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  が  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  の形になるのでそう置くことから始めると

$$\begin{aligned}\sqrt{2 + \sqrt{3}} &= \sqrt{a} + \sqrt{b} && \text{両辺2乗} \\ 2 + \sqrt{3} &= a + 2\sqrt{ab} + b \\ 2 + \sqrt{3} &= a + b + \sqrt{4ab}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4ab = 3 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

これより

$$\begin{aligned}2 + \sqrt{3} &= \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 4ab = 3 \end{cases}$$

を解くには上の式を  $b = 2 - a$  と変形して下の式に代入して

$$4a(2 - a) = 3$$

$$\therefore 4a^2 - 8a + 3 = 0$$

$$\therefore (2a - 1)(2a - 3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

という 2 次方程式になります。

注意するのは根号の中に  $-$  が入っている場合で  $\sqrt{5 - \sqrt{24}}$  の場合  $\sqrt{5 - \sqrt{24}} > 0$  に注意します。

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{両辺 2 乗}$$

$$5 - \sqrt{24} = a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$5 - \sqrt{24} = a + b - \sqrt{4ab}$$

これより

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ 4ab = 24 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

ここで  $\sqrt{5 - \sqrt{24}} > 0$  より

$$\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Let's Try

(1)  $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

(2)  $\sqrt{4 - \sqrt{12}}$

(3)  $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

(4)  $\sqrt{4 + \sqrt{15}}$

(1):  $\sqrt{3} + 1$ , (2):  $\sqrt{3} - 1$ , (3):  $2 + \sqrt{3}$ , (4):  $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$