絶対値の考え方と方程式の解とグラフ[*1]

絶対値のポイント

中学数学では

$$\left|3\right| = 3$$
$$\left|-3\right| = 3$$

と学習します.

高校では

$$\left|a\right| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \quad \cdots\cdots ① \\ -a & (a < 0) \quad \cdots\cdots ② \end{cases}$$

と習います．これは例えば a が 3 のとき①を使うので

$$\left|3\right| = 3$$

a が -3 のとき②を使うので

$$\begin{aligned} \left|-3\right| &= -a \\ &= -(-3) \\ &= 3 \end{aligned}$$

というふうに実数を入れてみたら当たり前のことです.

実際の問題での応用 1

問：

$$\left|x-6\right| = 9$$

の解について，$x-6=A$ とおくと左辺は $\left|A\right|$ となるので $A \geqq 0$ のとき $\left|A\right| = A$，$A < 0$ のとき $\left|A\right| = -A$ で場合分けをします.

i) $x-6 \geqq 0 \quad \therefore x \geqq 6$ のとき

$$\left|x-6\right| = x-6,$$
$$\therefore x-6 = 9$$
$$x = 9+6$$
$$= 15 \qquad \cdots\cdots x \geqq 6 \text{ を満たしている}$$

[*1] この資料は中高一貫校の生徒用に絶対値の考え方を中心に作成したものです

ii) $x-6<0 \quad \therefore x<6$ のとき

$$\left|x-6\right| = -(x-6),$$

$$\begin{aligned} \therefore -(x-6) &= 9 \\ -x+6 &= 9 \\ -x &= 9-6 \\ -x &= 3 \\ x &= -3 \qquad \cdots\cdots x<6 \text{ を満たしている} \end{aligned}$$

i), ii) より

$$x = 15,\ -3$$

幾何学的意味

中学 1 年の 1 次方程式 $x-6=0$ の解は $x=6$．この意味は，連立方程式

$$\begin{cases} y = x-6 & \leftarrow 1 \text{ 次関数} \\ y = 0 & \leftarrow x \text{ 軸} \end{cases}$$

の解と見れば，1 次関数 $y=x-6$ と x 軸 との交点の x 座標 (fig.1).

$x-6=9$ の解は，連立方程式

$$\begin{cases} y = x-6 & \\ y = 9 & \leftarrow x \text{ 軸に平行} \end{cases}$$

の交点の x 座標です (fig.2).

では $\left|x-6\right|=9$ の解は，連立方程式

$$\begin{cases} y = \left|x-6\right| \\ y = 9 \end{cases}$$

の解の x の値となるので，関数 $y=\left|x-6\right|$ がどのようなグラフかが問題になります．これは簡単で y は $\geqq 0$ でなければならないので，1 次関数 $y=x-6$ のグラフの $y<0$ の部分を x 軸を対称の軸として折り返せばいいだけです (fig.3)．このグラフと直線 $y=9$ の交点の x 座標が解になります (fig.4).

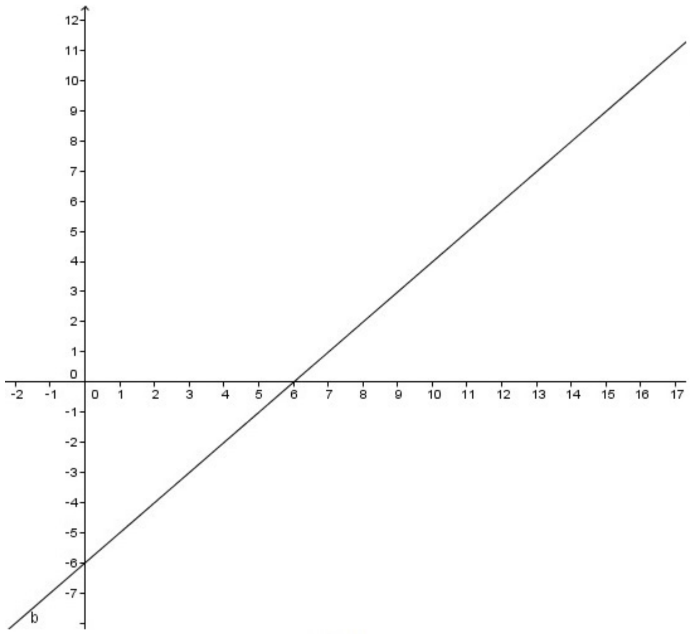

fig.1

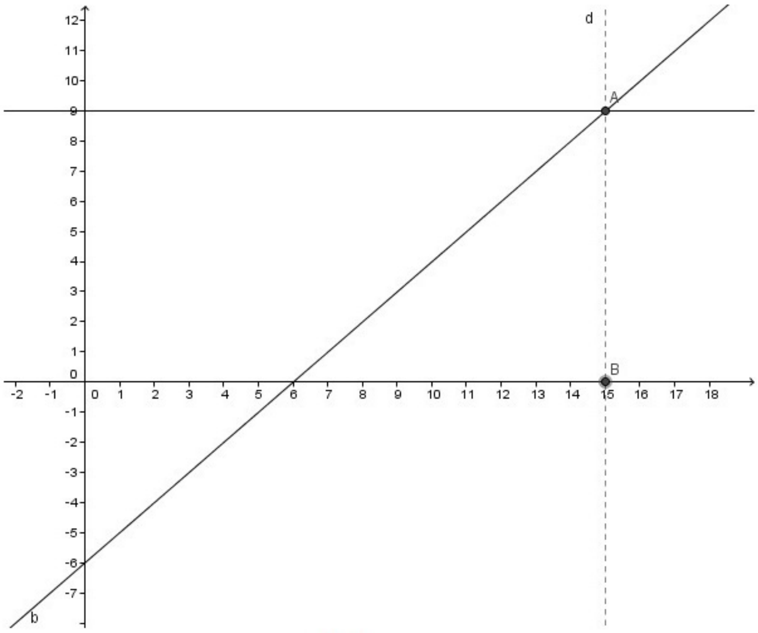

fig.2

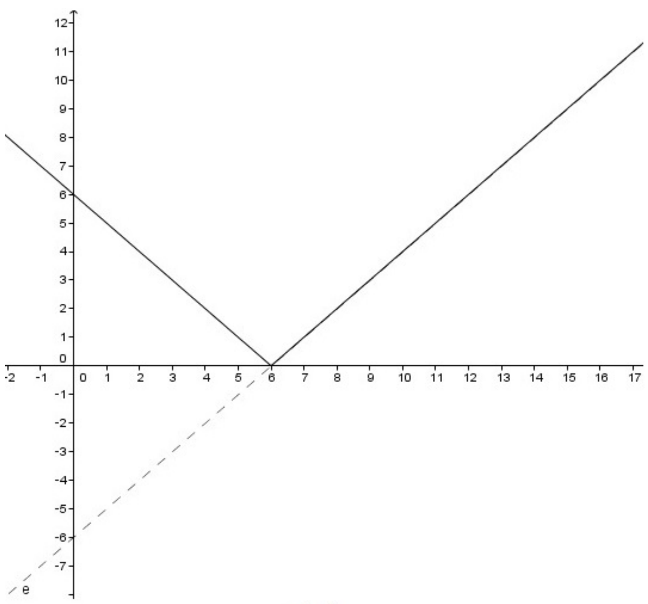

fig.3

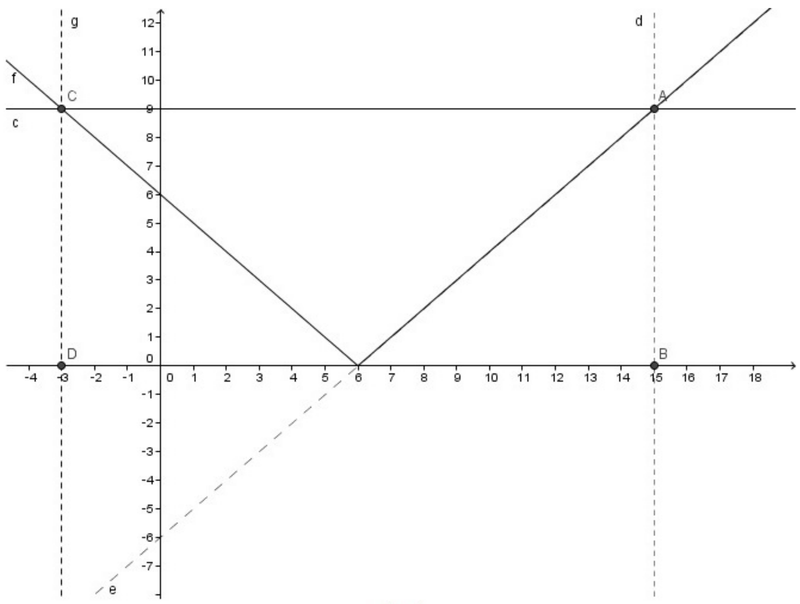

fig.4

実際の問題での応用 2

問：

$$\left| x-3 \right| = -2x$$

i) $x-3 \geqq 0 \quad \therefore x \geqq 3$ のとき

$$\left| x-3 \right| = x-3$$
$$\therefore x-3 = -2x$$
$$x+2x = 3$$
$$3x = 3$$
$$x = 1 \qquad \cdots\cdots x \geqq 3 \text{ より不適}$$

ii) $x-3 < 0 \quad \therefore x < 3$ のとき

$$\left| x-3 \right| = -(x-3)$$
$$= -x+3$$
$$\therefore -x+3 = -2x$$
$$-x+2x = -3$$
$$x = -3 \qquad \cdots\cdots x < 3 \text{ を満たしている}$$

i), ii) より

$$x = -3$$

グラフについて

$$\begin{cases} y = \left| x-3 \right| \\ y = -2x \end{cases}$$

と見ると fig.5

$$\left| x-3 \right| + 2x = 0 \text{ より}$$
$$y = \left| x-3 \right| + 2x$$

と見ると fig.6

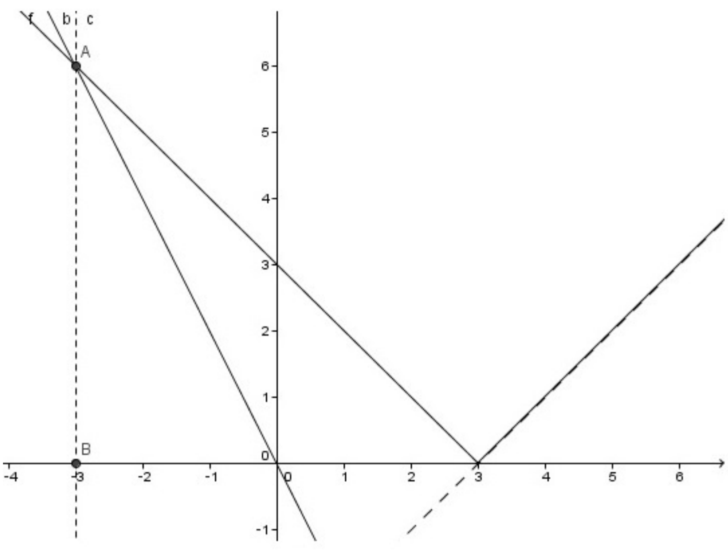

fig.5

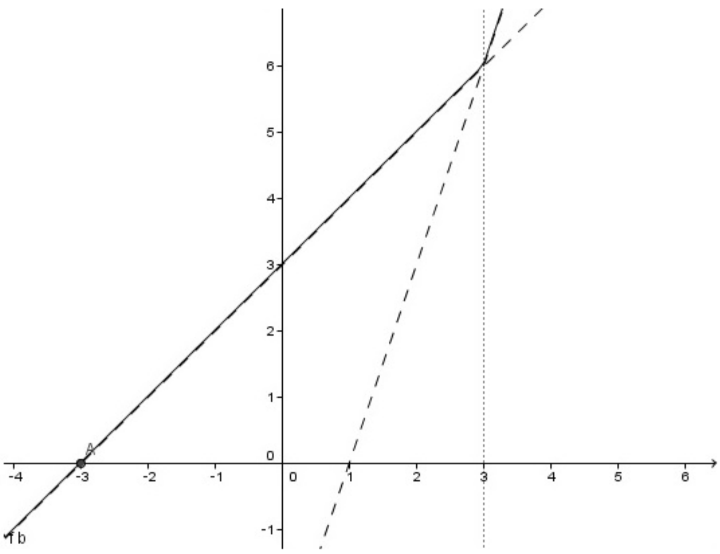

fig.6

実際の問題での応用 3

問：

$$\left|x-3\right|+\left|2x-3\right|=9$$

場合分けのために不等式を解くと

$x-3 \geqq 0$　より　$x \geqq 3$

$2x-3 \geqq 0$　より　$x \geqq \dfrac{3}{2}$

よって，場合分けは $x \geqq 3,\ 3 > x \geqq \dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2} > x$ で行います.

i) $x \geqq 3$ のとき

$\left|x-3\right| \geqq 0,\ \left|2x-3\right| > 0$ より

$$\begin{aligned}
\left|x-3\right|+\left|2x-3\right| &= 9 \\
\therefore (x-3)+(2x-3) &= 9 \\
x-3+2x-3 &= 9 \\
3x-6 &= 9 \\
3x &= 15 \\
x &= 5 \qquad \cdots\cdots x \geqq 3 \text{ を満たしている}
\end{aligned}$$

ii) $3 > x \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$\left|x-3\right| < 0,\ \left|2x-3\right| \geqq 0$ より

$$\begin{aligned}
\left|x-3\right|+\left|2x-3\right| &= 9 \\
\therefore -(x-3)+(2x-3) &= 9 \\
-x+3+2x-3 &= 9 \\
x &= 9 \qquad \cdots\cdots 3 > x \geqq \frac{3}{2} \text{より不適}
\end{aligned}$$

iii) $x < \dfrac{3}{2}$ のとき

$\left|x-3\right| < 0,\ \left|2x-3\right| < 0$ より

$$\begin{aligned}
\left|x-3\right|+\left|2x-3\right| &= 9 \\
-(x-3)-(2x-3) &= 9 \\
-x+3-2x+3 &= 9 \\
-3x+6 &= 9 \\
-3x &= 3 \\
x &= -1 \qquad \cdots\cdots x < \frac{3}{2} \text{を満たしている}
\end{aligned}$$

i), ii), iii) より

$$x = 5,\ -1$$

絶対値のグラフの描き方

絶対値に限らずグラフを描きなさい・図示しなさいという問題が出されるので解説します.

$$f(x) = \left|x-3\right| + \left|2x-3\right|$$

のグラフの描き方

i) $x \geqq 3$ のとき

$$f(x) = (x-3) + (2x-3)$$
$$\therefore f(x) = 3x-6$$

$$f(3) = 3\times 3 - 6 = 9-6$$
$$= 3 \qquad \rightarrow (x, y) = (3, 3)$$ がグラフの折れ線の境になる

ii) $3 > x \geqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$$f(x) = -(x-3) + (2x-3)$$
$$\therefore f(x) = x$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \qquad \rightarrow (x, y) = \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right)$$ がグラフの折れ線の境になる

iii) $x < \dfrac{3}{2}$ のとき

$$f(x) = -(x-3) - (2x-3)$$
$$\therefore f(x) = -3x+6$$

y 切片を求めるために

$$f(0) = 6$$

以上よりグラフは fig.7.
$\left|x-3\right| + \left|2x-3\right| = 9$ の解との関係を示すと fig.8 のようになります.

$\left|x-6\right| = 9$ の解を考えるときに $y = \left|x-6\right|$ を考えると $y < 0$ の部分を x 軸で折り返す ($y < 0$ の部分を x 軸を対称の軸として線対称な図をとして $y \geqq 0$ の領域に描く) ので描きやすくなりました．$y = \left|x-6\right| - 9$ のグラフで考えると x 軸との交点の x 座標が解になりますが，折れ線の場所を考えないといけないのでグラフの描き方が面倒臭くなります．練習で挑戦してみてください (fig.9).

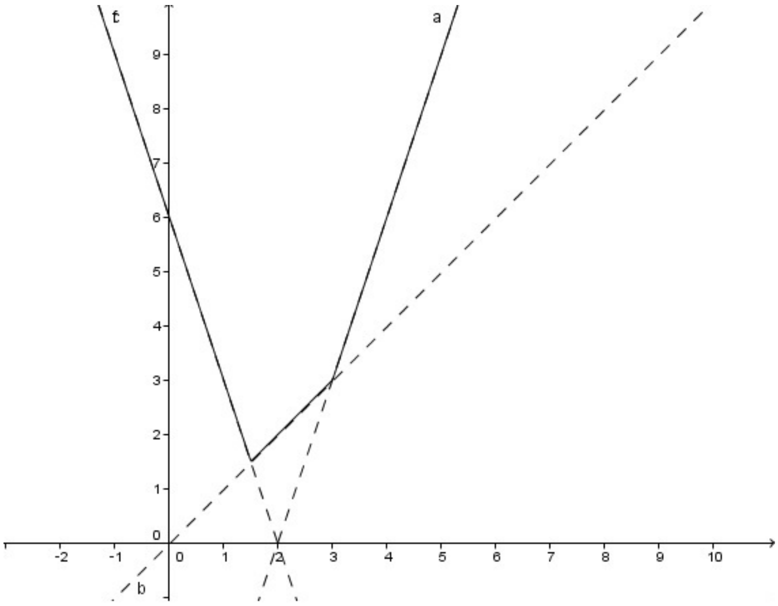

fig.7

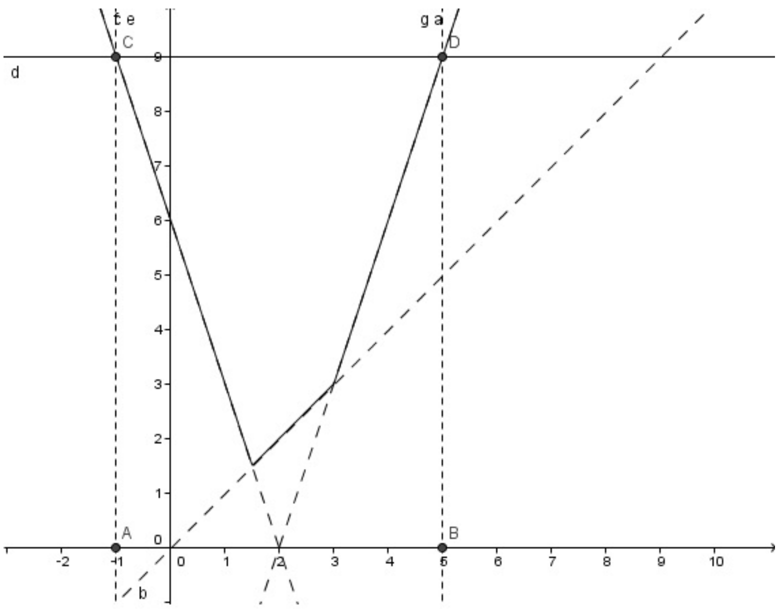

fig.8

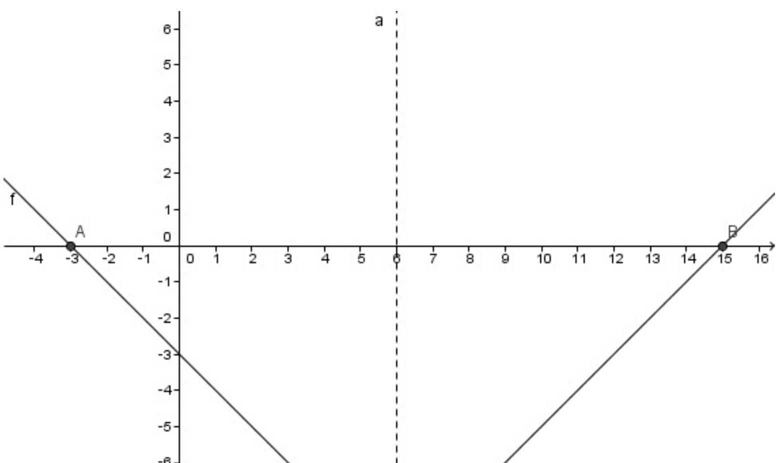

fig.9

補遺　- 因数分解の常套手段 -

因数分解の常套手段

1. 共通因数をくくり出す
2. 因数分解の公式を使う
3. 最低次数の文字について整理してから、因数分解する

問：

$$x^3 - x^2y - xz^2 + yz^2$$

の因数分解について，3. を適用すると，まず整理する文字は y になります.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2y - xz^2 + yz^2 &= x^3 - xz^2 + (-x^2 + z^2)y \\ &= x^3 - xz^2 - (x^2 - z^2)y \end{aligned}$$

これに 1. を適用すると

$$\begin{aligned} x^3 - xz^2 - (x^2 - z^2)y &= (x^2 - z^2)x - (x^2 - z^2)y \\ &= (x^2 - z^2)(x - y) \end{aligned}$$

この手順で因数分解をすると

$$\begin{aligned} x^3 - x^2y - xz^2 + yz^2 &= x^3 - xz^2 + (-x^2 + z^2)y \\ &= x^3 - xz^2 - (x^2 - z^2)y \\ &= (x^2 - z^2)x - (x^2 - z^2)y \\ &= (x^2 - z^2)(x - y) \\ &= (x + z)(x - z)(x - y) \end{aligned}$$

と，これが常套手段の解法なので，次数の異なる文字を含む文字式の因数分解はこれで解けます.