88

$$y = x^2 - 2ax - a + 2$$
$$\therefore y = x^2 - 2ax + a^2 - a^2 - a + 2$$
$$\therefore y = (x - a)^2 - a^2 - a + 2$$
$$\therefore y - \left(-a^2 - a + 2\right) = (x - a)^2$$

よってグラフの頂点は $\left(a,\ -a^2 - a + 2\right)$.
題意より

$$\begin{cases} a > 0 & \cdots\cdots① \\ -a^2 - a + 2 > 0 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

②より

$$-a^2 - a + 2 > 0$$
$$a^2 + a - 2 < 0$$
$$(a + 2)(a - 1) < 0$$
$$\therefore -2 < a < 1 \quad \cdots\cdots③$$

①, ③より

$$0 < a < 1$$

89

$$x^2 - 7x + 10 < 0$$
$$(x - 2)(x - 5) < 0$$
$$\therefore 2 < x < 5$$

よって，$x = 3$ or 4.
$x^2 + (1 - a)x - a = 0$ より

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(1-a) \pm \sqrt{(1-a)^2 + 4a}}{2} \\ &= \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 + 2a + 1}}{2} \\ &= \frac{a - 1 \pm (a + 1)}{2} \\ &= a,\ -1 \end{aligned}$$

よって

$$x^2 + (1 - a)x - a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{or} \begin{cases} x < a,\ -1 < x & \cdots\cdots① \\ x < -1,\ a < x & \cdots\cdots② \end{cases}$$

整数解が 3 か 4 のどちらか 1 つになるのは②のときで，このとき整数解が 3 であれば条件を満たす a は存在しない．よって整数解が 4 で，$a \leqq x$ であれば

$$3 < a \leqq 4$$

②で $a < x$ であるので，求める a の範囲は

$$\underset{\substack{\uparrow \\ x=3\text{ は含まない}}}{3 \leqq} a < 4$$

90

$x^2-3x=0$ より

$x(x-3)=0$

$\therefore x=0,\ 3$

i) $x^2-3x \geqq 0$ のとき
$x \leqq 0,\ 3 \leqq x \quad \cdots\cdots①$

$|x^2-3x| \geqq x$

$\therefore x^2-3x \geqq x$

$x^2-4x \geqq 0$

$x(x-4) \geqq 0$

$\therefore x \leqq 0, 4 \leqq x \quad \cdots\cdots②$

①, ②より

$x \leqq 0,\ 4 \leqq x$

ii) $x^2-3x<0$ のとき
$0<x<3 \quad \cdots\cdots③$

$|x^2-3x| \geqq x$

$\therefore -(x^2-3x) \geqq x$

$-x^2+3x \geqq x$

$-x^2+2x \geqq 0$

$x^2-2x \leqq 0$

$x(x-2) \leqq 0$

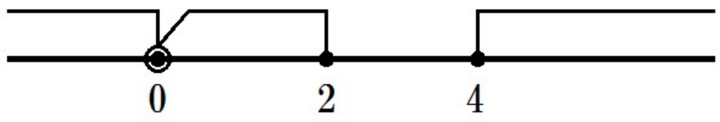
$\therefore 0 \leqq x \leqq 2 \quad \cdots\cdots④$

③, ④より

$0<x \leqq 2$

i), ii) より

$x \leqq 2,\ 4 \leqq x$



72 改

a を定数として，2 次関数 $y=-x^2+2ax+3\ (-2 \leqq x \leqq 1)$ の最大値と最小値を求めよ．

解答

$$\begin{aligned} y &= -x^2+2ax+3 \\ &= -\left(x^2-2ax\right)+3 \\ &= -\left(x^2-2ax+a^2-a^2\right)+3 \\ &= -(x-a)^2+a^2+3 \\ y-\left(a^2+3\right) &= -(x-a)^2 \end{aligned}$$

グラフは上に凸で，頂点は $(a,\ a^2+3)$，軸は $x=a$．$-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x)=-x^2+2ax+3$ の最大値を y_{max}，最小値を y_{min} とすると，

i) $a<-2$ のとき (fig. 1)

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= f(-2) \\ &= -4a-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{min}} &= f(1) \\ &= 2a+2 \end{aligned}$$

ii) $-2 \leqq a < -\dfrac{1}{2}$ のとき (fig. 2)

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= f(a) \\ &= a^2+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{min}} &= f(1) \\ &= 2a+2 \end{aligned}$$

iii) $a=-\dfrac{1}{2}$ のとき (fig. 3)

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{min}} &= f(-2)=f(-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

iv) $\dfrac{1}{2} \leqq a < 1$ のとき (fig. 4)

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= f(a) \\ &= a^2+3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{min}} &= f(-2) \\ &= -4a-1 \end{aligned}$$

v) $1<a$ のとき (fig. 5)

$$\begin{aligned} y_{\text{max}} &= f(1) \\ &= 2a+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{min}} &= f(-2) \\ &= -4a-1 \end{aligned}$$

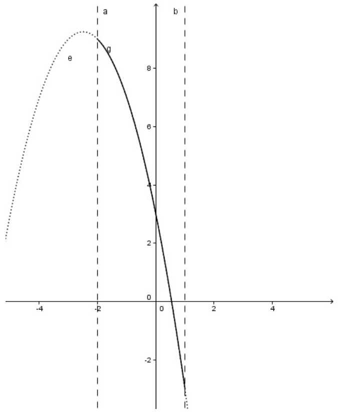


fig. 1

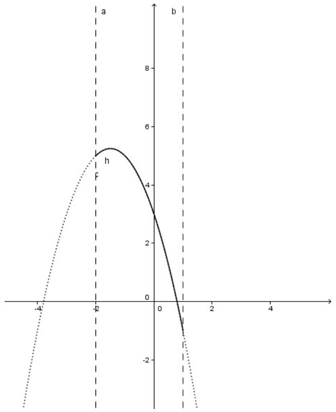


fig. 2

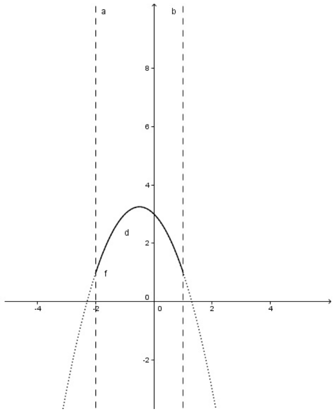


fig. 3

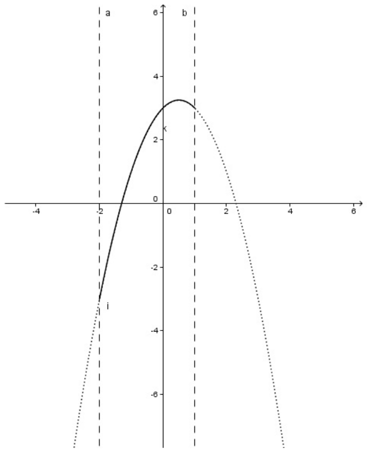


fig. 4

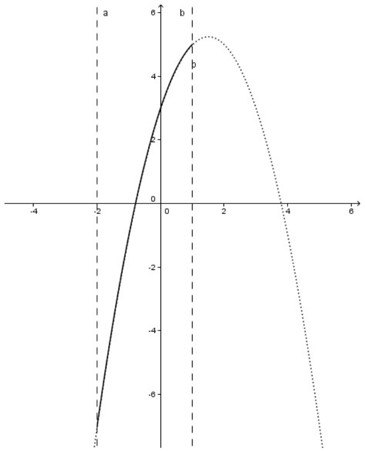


fig. 5