令和 3 年度後期学力検査　数学　詳解

1

あとの各問いに答えなさい。(12 点)

(1)　$8+(-13)$　を計算しなさい。

(2)　$-\frac{6}{7}a\div\frac{3}{5}$　を計算しなさい。

(3)　$2(x+3y)-3(2x-3y)$　を計算しなさい。

(4)　$(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$　を計算しなさい。

(5)　x^2-x-12　を因数分解しなさい。

(6)　二次方程式　$3x^2-7x+1=0$　を解きなさい。

(7)　A の畑で収穫(しゅうかく)したジャガイモ 50 個と B の畑で収穫したジャガイモ 80 個について，1 個ずつの重さを調べ，その結果を右の度数分布表に整理した。

次の [　] は，「150 g 以上 250 g 未満」の階級の相対度数について，述べたものである。 ① ， ② に，それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

階級(g)	度数(個)	
	A の畑で収穫したジャガイモ	B の畑で収穫したジャガイモ
以上　未満		
50 ～ 150	14	24
150 ～ 250	18	28
250 ～ 350	11	17
350 ～	7	11
計	50	80

A と B を比較(ひかく)して「150 g 以上 250 g 未満」の階級について，相対度数が大きいのは ① の畑で収穫したジャガイモであり，その相対度数は ② である。

解答

(1)

$$8+(-13)=8-13$$
$$=\mathbf{-5}$$

(2)

$$-\frac{6}{7}a\div\frac{3}{5}=-\frac{6}{7}a\times\frac{5}{3}=\left(-\frac{6}{7}\times\frac{5}{3}\right)a=-\frac{\cancel{6}^{\,2}\times5}{7\times\cancel{3}_{\,1}}a$$
$$=\boldsymbol{-\frac{10}{7}a}$$

(3)

$$2(x+3y)-3(2x-3y)=2x+6y-6x+9y$$
$$=2x-6x+6y+9y$$
$$=\boldsymbol{-4x+15y}$$

(4)

$$(3\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})=3\sqrt{2}\times\sqrt{2}+3\sqrt{2}\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{2}-\sqrt{5}\times\sqrt{5}$$
$$=3\times2+3\sqrt{10}-\sqrt{10}-5$$
$$=6-5+3\sqrt{10}-\sqrt{10}$$
$$=\boldsymbol{1+2\sqrt{10}}$$

(5)

$$x^2-x-12=\boldsymbol{(x-4)(x+3)}$$

(6)

$$3x^2-7x+1=0$$
$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\times3\times1}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-12}}{2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}}$$

(7)　「150 g 以上 250 g 未満」の階級について，A の畑の相対度数は

$$\frac{18}{50}=0.36$$

B の畑の相対度数は

$$\frac{28}{80} = 0.35$$

よって A の畑の相対度数のほうが大きい.

Ans. ①：A，②：**0.36**

2

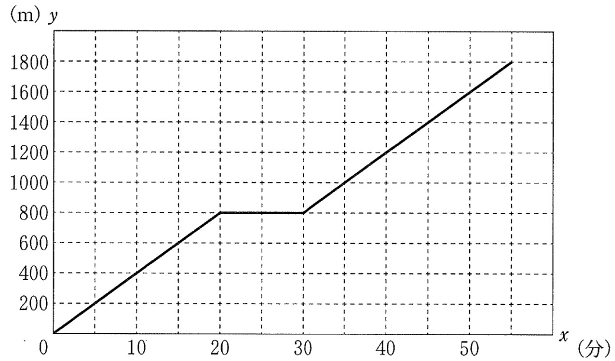
あとの各問いに答えなさい。(13 点)

(1)　A さんは，10 時ちょうどに P 地点を出発し，分速 a m で P 地点から 1800 m 離れている図書館に向かった。10 時 20 分に P 地点から 800 m 離れている Q 地点に到着し，止まって休んだ。10 時 30 分に Q 地点を出発し，分速 a m で図書館に向かい，10 時 55 分に図書館に到着した。

次のグラフは，10 時 x 分における P 地点と A さんの距離を y m として，x と y の関係を表したものである。

このとき，次の各問いに答えなさい。

ただし，P 地点と図書館は一直線上にあり，Q 地点は P 地点と図書館の間にあるものとする。



①　a の値を求めなさい。

②　B さんは，A さんが P 地点を出発してから 10 分後に図書館を出発し，止まらずに一定の速さで P 地点に向かい，10 時 55 分に P 地点に到着した。A さんと B さんが出会ったあと，A さんと B さんの距離が 1000 m であるときの時刻を求めなさい。

③　C さんは，A さんが P 地点を出発してから 20 分後に P 地点を出発し，止まらずに分速 100 m で図書館に向かった。C さんが A さんに追いついた時刻を求めなさい。

解答

(1)　①　グラフより 10 分間で 400 m 進んでいるから，分速は

$$a = \frac{400}{10} = \mathbf{40}$$

②　B さんの位置をグラフに書き込むと (図 1)，y 軸方向の差が 1000 になるのは $x = 45$ のとき．よって **10 時 45 分**.

③　C さんの位置をグラフに書き込むと (図 2)，A さんが Q 地点で休んでいる間に C さんは A さんに追いつく．よって C さんが A さんに追いついたのは P 地点から 800 m の位置であり，C さんは分速 100 m で向かっているので，P 地点を出発してから $\frac{800}{100} = 8$ 分後に追いついたことがわかる．C さんが出発したのは 10 時 20 分なので，追いついた時刻は **10 時 28 分**.

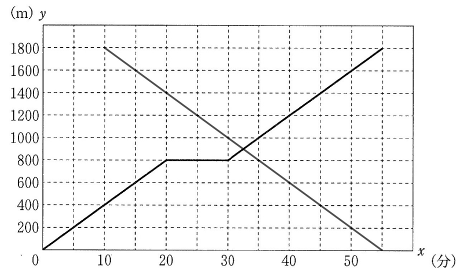


図 1

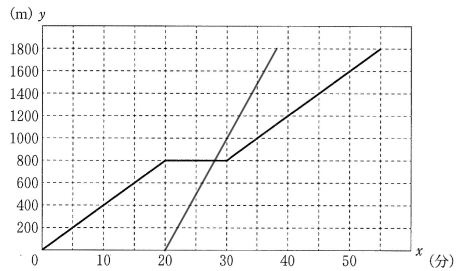


図 2

(2) 昨日の入園者数の関係から

$$\underline{x+y}_{①}=140 \quad \cdots\cdots ⓐ$$

今日の大人の入園者数は $x\times\left(1-\dfrac{10}{100}\right)=\dfrac{90}{100}x=\dfrac{9}{10}x$ 人，子どもの入園者数は $y\times\left(1+\dfrac{5}{100}\right)=\dfrac{105}{100}y$ 人．今日の入園料の合計の関係から

$$\underline{\frac{9}{10}x\times500+\frac{105}{100}y\times300}_{②}=52200$$

$$450x+315y=52200 \quad \cdots\cdots ⓑ$$

ⓐより

$$y=140-x \quad \cdots\cdots ⓒ$$

ⓒをⓑに代入して

$$\begin{aligned}450x+315(140-x)&=52200\\450x+44100-315x&=52200\\450x-315x&=52200-44100\\135x&=8100\\x&=\underline{60}_{③}\end{aligned}$$

ⓒより

$$y=140-60=\underline{80}_{④}$$

今日の大人の入園者数は $\dfrac{9}{10}x=\dfrac{9}{10}\times60=\underline{54}_{⑤}$ 人，今日の子どもの入園者数は $\dfrac{105}{100}y=\dfrac{105}{100}\times80=\underline{84}_{⑥}$ 人．

Ans. ①：$\boldsymbol{x+y}$，②：$\boldsymbol{\dfrac{9}{10}x\times500+\dfrac{105}{100}y\times300}$，③：**60**，④：**80**，⑤：**54**，⑥：**84**

(3) ① 玉の取り出し方は $5\times5=25$ 通り．
a と b の積が 12 以上になるとき

$(a,b)=(3,4)$，$(3,5)$
$(4,3)$，$(4,4)$，$(4,5)$
$(5,3)$，$(5,4)$，$(5,5)$

の 8 通り．よって求める確率は $\boldsymbol{\dfrac{8}{25}}$．

② 両方が偶数であるとき

$(a,b)=(2,2)$，$(2,4)$
$(4,2)$，$(4,4)$

の 4 通りあり，両方が偶数である確率は $\dfrac{4}{25}$．少なくとも一方が奇数である確率はこの余事象なので

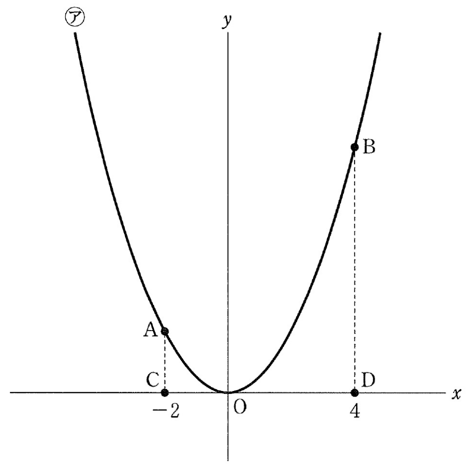
$$1-\frac{4}{25}=\boldsymbol{\frac{21}{25}}$$

➡**注**　**【余事象】**ある事象以外のすべての事象のことを「余事象（よじしょう）」という．「少なくとも A が起こる確率」が問われる場合は次のように確率を求めることができる：

（少なくとも A が起こる確率）＝ 1 −（A が起こらない確率）

3

次の図のように，関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ …㋐のグラフ上に 2 点 A，B があり，x 軸（じく）上に 2 点 C，D がある。 2 点 A，C の x 座標はともに − 2 であり， 2 点 B，D の x 座標はともに 4 である。
このとき，あとの各問いに答えなさい。（8 点）



⑴　点Ａの座標を求めなさい。

⑵　㋐について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のときの y の変域を求めなさい。

⑶　線分AB上に点Ｅをとり，四角形ACDEと△BDEをつくる。四角形ACDEの面積と△BDEの面積の比が２：１となるとき，点Ｅの座標を求めなさい。

⑷　直線ABと y 軸の交点をＦとし，四角形ACDFをつくる。四角形ACDFを，x 軸を軸として１回転させてできる立体の体積を求めなさい。
ただし，円周率は π とする。

解答

⑴　点Ａは $y=\frac{1}{2}x^2$ のフラフ上の $x=-2$ の点なので，y 座標は

$$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$$

よって $\mathbf{A(-2,\ 2)}$.

⑵　$x=-3$ のとき $y=\frac{1}{2}\times(-3)^2=\frac{9}{2}$. x の変域 $-3\leqq x\leqq 2$ は原点Ｏをまたいでいるので，y の変域は $\mathbf{0\leqq y\leqq \frac{9}{2}}$.

⑶　点Ｂの座標は $y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$ より B(4, 8).
ABを通る直線の方程式を $y=ax+b$ とすると，A(−2, 2) を通ることより

$$2=-2a+b \quad \cdots\cdots ①$$

B(4, 8) を通ることより

$$8=4a+b \quad \cdots\cdots ②$$

①, ②を連立方程式として解くと $a=1$，$b=4$. よって直線ABの方程式は $y=x+4$.
線分 BD = 8，線分 CD = 4 − (−2) = 4 + 2 = 6，四角形ACDBはCDを高さとする台形で，面積は

$$\begin{aligned}\text{四角形 ACDB} &= \frac{1}{2}\times(\text{AC}+\text{BD})\times\text{CD}=\frac{1}{2}\times(2+8)\times 6\\ &=30\end{aligned}$$

点Ｅの x 座標を c とすると，△BDEは底辺BD，高さ $(4-c)$ の三角形なので，面積は

$$\begin{aligned}\triangle\text{BDE} &= \frac{1}{2}\times 8\times(4-c)\\ &=16-4c\end{aligned}$$

四角形ACDEの面積は

$$\begin{aligned}\text{四角形 ACDE} &= \text{四角形 ACDB}-\triangle\text{BDE}=30-(16-4c)\\ &=14+4c\end{aligned}$$

四角形ACDEと△BDEの面積の比の関係から

$$\begin{aligned}(14+4c):(16-4c)&=2:1\\ (14+4c)\times 1&=(16-4c)\times 2\\ 14+4c&=32-8c\\ 12c&=18\\ c&=\frac{18}{12}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

Ｅは $y=x+4$ 上の点なので，$y=x+4$ に $x=c=\frac{3}{2}$ を代入して

$$y=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$$

よって $\mathbf{E\left(\frac{3}{2},\ \frac{11}{2}\right)}$.

⑷　AB : $y=x+4$ より F(0, 4). $y=x+4$ に $y=0$ を代入すると $x=-4$ となるから，直線ABは点 (−4, 0) で x 軸と交わり，G(−4, 0) とする.
△DOFを x 軸を軸として１回転させてできる立体の体積を H,
△GOFを x 軸を軸として１回転させてできる立体の体積を I,
△GCAを x 軸を軸として１回転させてできる立体の体積を J とすると，このとき
H，I，J はどれも円すいで，$H=I$ であり，求める体積は $H+I-J=2H-J$ である.

FO ＝ 4 より

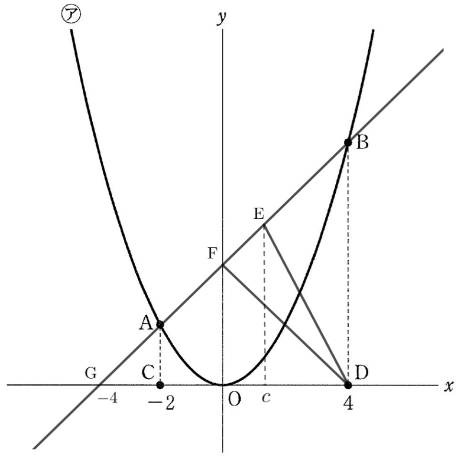
$$H=\frac{1}{3}\times\pi\times\mathrm{FO}^2\times\mathrm{DO}=\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times4$$
$$=\frac{64}{3}\pi$$

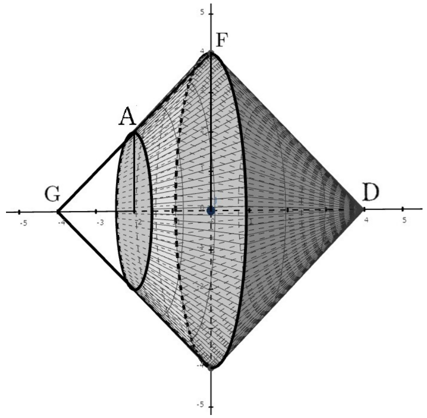
GC ＝ −2 − (−4) ＝ 2，AC ＝ 2 より

$$J=\frac{1}{3}\times\pi\times\mathrm{AC}^2\times\mathrm{GC}=\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2$$
$$=\frac{8}{3}\pi$$

以上より求める体積は

$$2H-J=2\times\frac{64}{3}\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{128}{3}\pi-\frac{8}{3}\pi=\frac{120}{3}\pi$$
$$=\mathbf{40\pi}$$





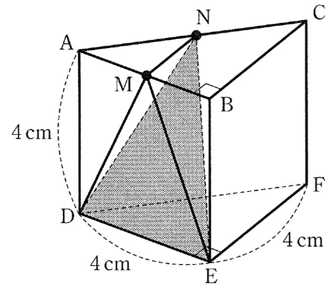
4

あとの各問いに答えなさい。（6 点）

(1)　右の図のように，点 A，B，C，D，E，F を頂点とし，AD ＝ DE ＝ EF ＝ 4 cm，∠DEF ＝ 90° の三角柱がある。辺 AB，AC の中点をそれぞれ M，N とする。

このとき，次の各問いに答えなさい。

なお，各問いにおいて，答えの分母に $\sqrt{}$ がふくまれるときは，分母を有理化しなさい。また，$\sqrt{}$ の中をできるだけ小さい自然数にしなさい。

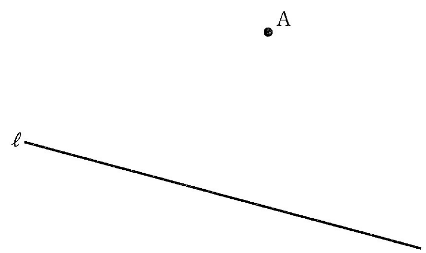


①　線分 DM の長さを求めなさい。

②　点 M から △NDE をふくむ平面にひいた垂線と △NDE との交点を H とする。このとき，線分 MH の長さを求めなさい。

(2)　次の図で，点 A を通り，直線 ℓ に接する円のうち，半径が最も短い円を，定規とコンパスを用いて作図しなさい。

なお，<u>作図に用いた線は消さずに残しておきなさい</u>。



解答

(1) ①　AM $= 2$ cm だから，△ADM で三平方の定理より

$$\mathrm{DM}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AM}^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4$$
$$= 20$$

DM > 0 より

$$\mathrm{DM} = \sqrt{20} = \mathbf{2\sqrt{5}}\ \mathrm{cm}$$

②　△ABC で中点連結定理より MN $= \frac{1}{2}$BC $= 2$ cm，また MN // BC．△MDE の面積は四角形 ABED の $\frac{1}{2}$ である．すなわち

$$\triangle\mathrm{MDE} = \frac{1}{2} \times 四角形\ \mathrm{ABED} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$
$$= 8\ \mathrm{cm}^2$$

三角すい N-MDE の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{MDE} \times \mathrm{MN} = \frac{1}{3} \times 8 \times 2$$
$$= \frac{16}{3}\ \mathrm{cm}^3$$

∠ABC $= 90°$，AB $=$ CB $= 4$ cm より AC $= 4\sqrt{2}$ cm である．よって
AN $= \frac{1}{2}$AC $= 2\sqrt{2}$ cm.
△ADN で三平方の定理より

$$\mathrm{DN}^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{AN}^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16 + 8$$
$$= 24$$
$$\mathrm{DN} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ \mathrm{cm}\ (> 0)$$

△NDE で N から DE に下ろした垂線と DE との交点を G とすると，
AB ⊥ NM，AB // DE であるから点 G は DE の中点となる．すなわち DG $= 2$ cm.
△NDG で三平方の定理より

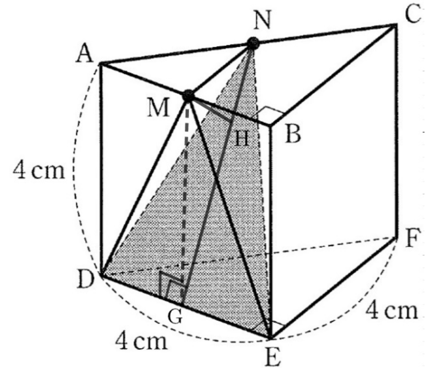
$$\mathrm{NG}^2 = \mathrm{DN}^2 - \mathrm{DG}^2 = 24 - 2^2$$
$$= 20$$
$$\mathrm{NG} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\ \mathrm{cm}\ (> 0)$$

よって

$$\triangle\mathrm{NDE} = \frac{1}{2} \times \mathrm{DE} \times \mathrm{NG} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5}$$
$$= 4\sqrt{5}\ \mathrm{cm}^2$$

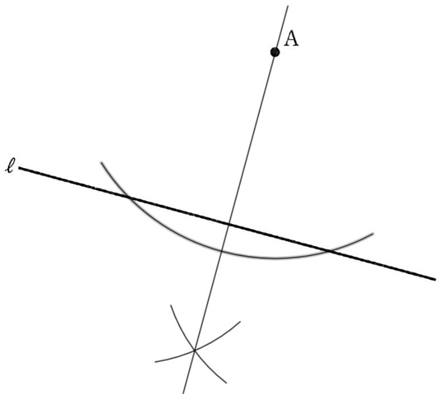
三角すい M-NDE の体積は V に等しく，線分 MH の長さは △NDE を底面としたときの三角すいの高さだから

$$V = \frac{1}{3} \times \triangle\mathrm{NDE} \times \mathrm{MH}$$
$$\frac{16}{3} = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{5} \times \mathrm{MH}$$
$$\mathrm{MH} = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{4\sqrt{5}}{5}}\ \mathrm{cm}$$

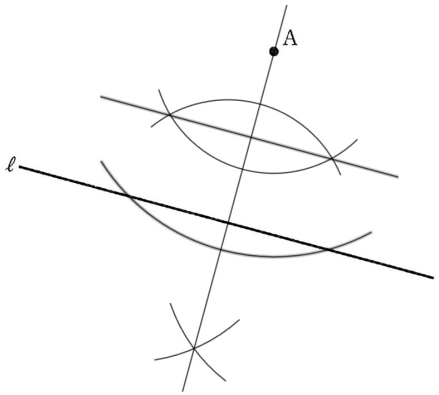


(2) 点 A と ℓ の距離が直径となる円を作図すればよい．
①　A から ℓ への垂線を作図する．
②　A と，①の直線と ℓ との交点の垂直二等分線を作図する．
③　①, ②の直線の交点を中心とし，点 A を通る円を作図する．

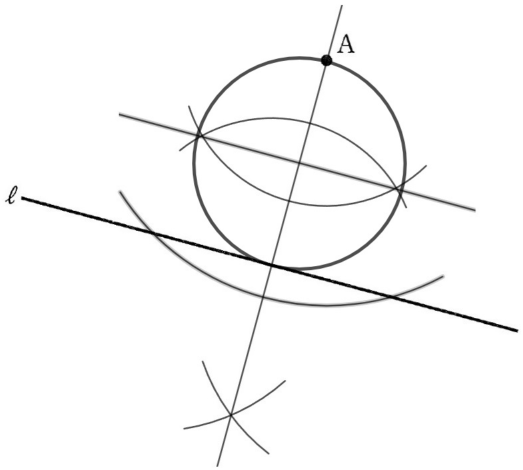
①



②



③

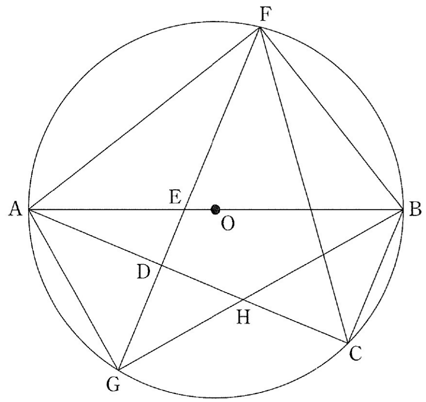


5

次の図のように，線分 AB を直径とする円 O の円周上に点 C をとり，△ABC をつくる。線分 AC 上に BC ＝ AD となる点 D をとり，点 D を通り線分 BC に平行な直線と線分 AB との交点を E とする。直線 DE と円 O の交点のうち，点 C をふくまない側の弧(こ) AB 上にある点を F，点 C をふくむ側の弧 AB 上にある点を G とする。また，線分 BG と線分 AC の交点を H とする。

このとき，あとの各問いに答えなさい。

ただし，AC > BC とする。(11 点)



(1) 次の [　　] は，△AGE ∽ △ACF であることを証明したものである。[(ア)] 〜 [(ウ)] に，それぞれあてはまる適切なことがらを書き入れなさい。

〈証　明〉 △AGE と △ACF において，

弧 AF に対する円周角は等しいから，　[(ア)] ＝ ∠ACF　…①

BC//FG より，平行線の同位角は等しいから，　∠AEG ＝ [(イ)]　…②

弧 AC に対する円周角は等しいから，　[(イ)] ＝ ∠AFC　…③

②，③より，　∠AEG ＝ ∠AFC　…④

①，④より，[(ウ)] がそれぞれ等しいので，

△AGE ∽ △ACF

⑵　△ADG ≡ △BCH であることを証明しなさい。

⑶　AB = 13 cm，BC = 5 cm のとき，次の各問いに答えなさい。

①　線分 DE の長さを求めなさい。

②　△BFG の面積と △OFG の面積の比を，最も簡単な整数の比で表しなさい。

解答

⑴

<証　明>　△AGE と △ACF において，

弧 AF に対する円周角は等しいから，　$\boxed{^{(ア)}\angle \mathbf{AGE}} = \angle ACF$　…①

BC // FG より，平行線の同位角は等しいから，　$\angle AEG = \boxed{^{(イ)}\angle \mathbf{ABC}}$　…②

弧 AC に対する円周角は等しいから，　$\boxed{^{(イ)}\angle ABC} = \angle AFC$　…③

②, ③より，　$\angle AEG = \angle AFC$　…④

①, ④より，$\boxed{^{(ウ)}\textbf{2 組の角}}$がそれぞれ等しいので，　△AGE ∽ △ACF

⑵　<証明>　△ADG と △BCH において，仮定より AD = BC　…①

弧 GC に対する円周角は等しいので ∠GAC = ∠GBC，すなわち ∠GAD = ∠HBC　…②

BC // FG より，錯角の関係から ∠HGD = ∠HCB　…③

△ABC で，AB は円の直径なので ∠ACB = 90°，すなわち ∠HCB = 90°　…④

③, ④より ∠HDG = ∠HCB = 90° であるから，

∠GDA = 180° − ∠HDG = 180° − 90° = 90°　…⑤

④, ⑤より ∠GDA = ∠HCB（= 90°）…⑥

①, ②, ⑥より，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので △ADG ≡ △BCH

⑶　①　△ABC で三平方の定理より

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144}$$
$$= 12 \text{ cm}$$

DE // CB，AD = BC = 5 cm なので

$$AD : AC = DE : CB$$
$$5 : 12 = DE : 5$$
$$12DE = 25$$
$$DE = \mathbf{\frac{25}{12}} \text{ cm}$$

②　AD : DC = 5 : (12 − 5) = 5 : 7．DE // CB より

AE : EB = 5 : 7

よって AB = 13 cm より

$$EB = 13 \times \frac{7}{5+7} = \frac{91}{12}$$

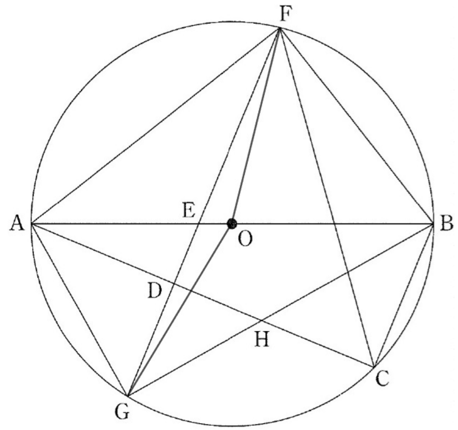
$OB = \frac{1}{2}AB = \frac{13}{2}$ cm だから

$$EO = \frac{91}{12} - \frac{13}{2} = \frac{91}{12} - \frac{78}{12}$$
$$= \frac{13}{12}$$

△BFG : △OFG = EB : EO だから，

求める比は

$$\frac{91}{12} : \frac{13}{12} = 91 : 13$$
$$= \mathbf{7 : 1}$$

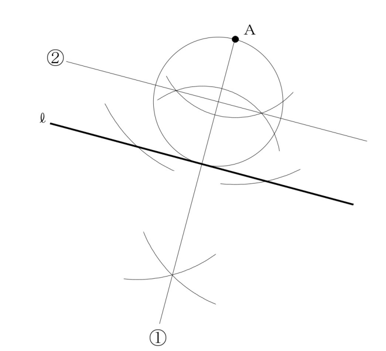


Ｂ（数学）採点基準

「採点基準」で処理できない場合は，各校の統一見解で採点されたい。

問題			配点	正答例	備考
1 １２点	⑴		１点	-5	
	⑵		１点	$-\frac{10}{7}a$	
	⑶		２点	$-4x+15y$	
	⑷		２点	$1+2\sqrt{10}$	
	⑸		２点	$(x+3)(x-4)$	
	⑹		２点	$x=\frac{7\pm\sqrt{37}}{6}$	
	⑺	①	２点	Ａ	＊　①，②両方正答の場合のみ，２点。
		②		０．３６	
2 １３点	⑴	①	１点	$a=40$	
		②	２点	１０時４５分	
		③	２点	１０時２８分	
	⑵	①	１点	$x+y$	
		②	１点	$\frac{90}{100}x\times500+\frac{105}{100}y\times300$	
		③	１点	６０	＊　③，④両方正答の場合のみ，１点。
		④		８０	
		⑤	１点	５４	＊　⑤，⑥両方正答の場合のみ，１点。
		⑥		８４	
	⑶	①	２点	$\frac{8}{25}$	
		②	２点	$\frac{21}{25}$	
3 ８点	⑴		２点	Ａ（-2，2）	
	⑵		２点	$0\leqq y\leqq\frac{9}{2}$	
	⑶		２点	Ｅ（$\frac{3}{2}$，$\frac{11}{2}$）	
	⑷		２点	40π	

（裏面へ続く）

問題			配点	正答例	備考
4 ６点	⑴	①	１点	$2\sqrt{5}$　cm	
		②	２点	$\frac{4\sqrt{5}}{5}$　cm	
	⑵		３点		・　①が示せて，１点。 ・　②が示せて，１点。 ＊　数学的な推論をもとに，作図されていればよい。
5 １１点	⑴	㋐	１点	∠ＡＧＥ	
		㋑	１点	∠ＡＢＣ	
		㋒	１点	２組の角	
	⑵		４点	〈証　明〉 △ＡＤＧと△ＢＣＨにおいて， 仮定より，　ＡＤ＝ＢＣ　・・・① 弧ＣＧに対する円周角は等しいから， ∠ＤＡＧ＝∠ＣＢＨ　・・・② 半円の弧ＡＢに対する円周角だから， ∠ＢＣＨ＝９０°　・・・③ ＢＣ∥ＦＧより，平行線の同位角は等しいから， ∠ＢＣＨ＝∠ＦＤＡ　・・・④ ③，④より， ∠ＦＤＡ＝９０°　・・・⑤ ⑤より， ∠ＡＤＧ＝１８０°－∠ＦＤＡ＝９０°　・・・⑥ ③，⑥より， ∠ＡＤＧ＝∠ＢＣＨ　・・・⑦ ①，②，⑦より， １組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいので， △ＡＤＧ≡△ＢＣＨ	・　①の証明ができて，１点。 ・　②の証明ができて，１点。 ・　⑦の証明ができて，１点。 ＊　数学的な推論の過程が，的確に表現されていればよい。
	⑶	①	２点	$\frac{25}{12}$　cm	
		②	２点	△ＢＦＧ：△ＯＦＧ　＝　７：１	
合　計			５０点		