

53の解答

(1) 有理数と無理数の和は無理数である.

[証明]

任意の有理数を a , 任意の無理数を p とし, $a + p$ が有理数 r であると仮定する. すなわち

$$a + p = r$$

ここで, a, r は有理数であるから,

$$a = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{ は互いに素な整数, } m \neq 0)$$

$$r = \frac{l}{k} \quad (k, l \text{ は互いに素な整数, } k \neq 0)$$

とおくと

$$\begin{aligned} a + p = r & \quad \Leftrightarrow \quad p = r - a \\ & = \frac{l}{k} - \frac{n}{m} \\ \therefore p & = \frac{lm - kn}{km} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

ここで, m, n, k, l は整数であるから①の右辺は有理数, 左辺は無理数より矛盾する. したがって, 有理数と無理数の和は無理数である.

Q.E.D.

(2) 0 でない有理数と無理数の積は無理数である.

[証明]

0 でない有理数を a , 任意の無理数を p とする. ap が有理数 r であるとする仮定すると

$$ap = r$$

ここで, a, r は有理数であるから,

$$a = \frac{n}{m} \quad (m, n \text{ は互いに素な整数, } n, m \neq 0)$$

$$r = \frac{l}{k} \quad (k, l \text{ は互いに素な整数, } k \neq 0)$$

とおくと

$$\begin{aligned} ap = r & \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n}{m}p = \frac{l}{k} \\ \therefore p & = \frac{lm}{kn} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

ここで, m, n, k, l は整数であるから②の右辺は有理数, 左辺は無理数より矛盾する. したがって, 有理数と無理数の積は無理数である.

Q.E.D.