51 の詳しい証明

[証明]
$\sqrt{6}$ が有理数であると仮定すると，互いに素 (互いに 1 以外の公約数を持たない) 整数 $a,\ b$ を用いて

$$\sqrt{6} = \frac{b}{a} \qquad\qquad (a \neq 0)$$

と書ける．この両辺を 2 乗して

$$6 = \frac{b^2}{a^2}$$
$$\therefore b^2 = 6a^2 \quad \cdots\cdots ①$$

よって b^2 は 6 の倍数である．すなわち

$$b^2 = 6k \qquad\qquad (k : 整数)$$

と書くことができ，このとき 6 は平方数 (整数の 2 乗) ではないので，k も 6 の倍数でなければならず，$k = 6c^2$ (c : 整数) と置けば

$$b^2 = 6 \times 6c^2 = (6c)^2$$
$$\therefore b = 6c \quad \cdots\cdots ②$$

したがって b は 6 の倍数である．②を①へ代入して

$$6a^2 = 36c^2$$
$$\therefore a^2 = 6c^2$$

よって同様にして a は

$$a = 6d \qquad\qquad (d : 整数)$$

と書けるので a は 6 の倍数である．以上より a も b も 6 の倍数であり，a と b が互いに素であることと矛盾する．したがって $\sqrt{6}$ は無理数である．

Q.E.D.